

El estado actual de la tecnología en Modelos Digitales del Terreno

Rubén Martínez Marín ⁽¹⁾
Juan Carlos Ojeda Manrique
Miguel Marchamalo Sacristán

⁽¹⁾ Catedrático de Ingeniería y Morfología del Terreno
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (UPM)
ruben.martinez@upm.es

RESUMEN

La Cartografía y la Topografía, como otras ciencias y técnicas, han experimentado una importante evolución hacia la utilización de los sistemas informáticos y la electrónica. No es necesario recordar la gran proliferación de receptores de GPS, sensores LiDAR y SAR en general y la progresiva incorporación de estas tecnologías en los trabajos cartográficos y topográficos de hoy en día. Por otra parte, la versatilidad y productividad que supone la utilización de las estaciones totales y los instrumentos topográficos basados en la electrónica, así como su conexión con los sistemas gráficos, hacen que actualmente los profesionales de la topografía dispongan de sistemas dedicados exclusivamente a la generación de modelos digitales del terreno.

Es por ello por lo que conviene conocer, al menos de forma somera, las características de estas aplicaciones y su fundamento teórico. Dicho conocimiento permitirá poder juzgar en qué situaciones será conveniente utilizar cada uno de los sistemas disponibles.

El presente documento analiza las características de los modeladores digitales del terreno habitualmente utilizados, desde el punto de vista de su fundamento teórico, indicando las ventajas y los inconvenientes que presentan cada uno de ellos. También se exponen las últimas técnicas en la adquisición de datos para generación de modelos digitales del terreno.

1. INTRODUCCIÓN

Un modelador digital del terreno es un simulador matemático de la representación física del terreno, en definitiva es lo que en otras ramas de la ciencia y la técnica se conoce con el nombre de ‘modelo matemático’. Básicamente, consiste en utilizar una metodología y un algoritmo matemático que permita realizar las dos funciones principales:

1º Calcular la cota en cualquier punto del terreno.

2º Generar las curvas de nivel.

El resto de funcionalidades, que a menudo aportan estos sistemas, están desarrolladas basándose en las actividades indicadas anteriormente. Los datos de partida para que el modelador digital del terreno (MDT) pueda realizar sus funciones son los puntos del terreno que se hayan levantado por cualquiera de los métodos topográficos habituales (taquimetría, fotogrametría, etc.). La calidad de estos datos será fundamental para conseguir un modelo matemático del terreno aceptable, sirva como indicación que la distribución de los puntos levantados deberá ser, en general uniforme y con mayor densidad en aquellas zonas del terreno donde se puedan producir mayores indeterminaciones.

Los modeladores digitales del terreno se pueden clasificar, atendiendo a la estructura de los datos soportados, en modelos de malla regular, de red irregular de triángulos, de secciones o de cadenas (‘strings’). Atendiendo a la naturaleza de los datos manejados, se clasifican en vectoriales y “raster”.

En cuanto a los algoritmos matemáticos de interpolación y extrapolación nos encontramos con una gran variedad de posibilidades: gravitacionales, estadísticos, polinómicos, Spline, etc.

Considerando la cota de cada punto como un atributo o variable asociada a la posición en planta de cada uno de ellos, la utilización de modeladores digitales del terreno para otros fines es algo muy común. Su versatilidad es tan grande que pueden ser aplicados a la interpolación de datos meteorológicos, de aforos, de contaminación y como ya se ha indicado anteriormente, para interpolar cualquier variable de la que se disponga una serie de mediciones espaciales distribuidas.

2. CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS Y ALGORITMOS DE INTERPOLACIÓN

De acuerdo con la metodología y el algoritmo de interpolación en la que están basados, se clasifican en:

- Modelos digitales del terreno sobre malla regular o rejilla.
 - Algoritmo gravitacional (ponderación inversamente proporcional al cuadrado de la distancia).
 - Algoritmos geoestadísticos (Krigado): Ordinario, simple o universal,
 - Curvatura mínima (Splines).

- Mediante secciones radiales.
- Modelos digitales del terreno sobre red irregular de triángulos.
 - Interpolación mediante Splines, B-Splines y NURBS.
 - Interpolación mediante polinomios de grado ' n '.
- Modelos digitales del terreno basados en curvas de nivel o 'strings'.

En la tabla nº 1 se incluye un resumen de las metodologías y algoritmos habitualmente utilizados.

Tabla nº 1. Modelos y algoritmos

Tipo de modelo	Algoritmo de interpolación
Malla rectangular regular	Gravitacionales
	Geoestadísticos
	Curvatura mínima
	Secciones radiales
Malla triangular	Splines, B-Splines y NURBS.
	Polinomios de grado ' n '
Curvas de nivel (strings)	Secciones longitudinales y transversales

3. DEFINICIÓN DE LA MALLA BASE

Si la malla base es rectangular y regular, para definirla, solo es necesario indicar la longitud del paso en ambas direcciones. El tamaño del paso es función de la cantidad de puntos conocidos y de la precisión deseada. En el caso de malla triangular, el problema es más complejo. Se trata de generar un conjunto de triángulos cuyos vértices sean los puntos del terreno que previamente han sido levantados, es lo que se conoce como triangulación de una nube de puntos en el espacio distribuidos arbitrariamente.

La solución al problema planteado se puede abordar con diversos algoritmos, de los que el más conocido es el de Dirichlet-Delaunay, figura nº 1, consistente en subdividir un dominio dado en un conjunto de

polígonos convexos. Dado un conjunto de puntos $P_1, \dots, P_n$, se toman dos puntos P_i y P_j pertenecientes al mismo, la mediatriz M_{ij} del segmento P_iP_j divide el plano en dos semiplanos V_i y V_j , tales que los puntos del semiplano V_i son más cercanos a P_i que a P_j , mientras que los puntos del semiplano V_j son más cercanos a P_j que a P_i . Considerando más de dos puntos, el concepto expuesto anteriormente se puede generalizar, de tal forma que la porción del plano V_k será la constituida por todos los puntos del plano más cercanos a P_k que a cualquier otro punto del conjunto inicial. A esta partición del plano en n regiones se le conoce como teselación de Dirichlet y los polígonos que delimitan cada una de las regiones se denominan polígonos de Voronoi. Este concepto que acaba de ser expuesto para el plano puede ser aplicado al espacio, sin más que sustituir la recta mediatriz por el plano mediatriz y el polígono por la superficie poliédrica.

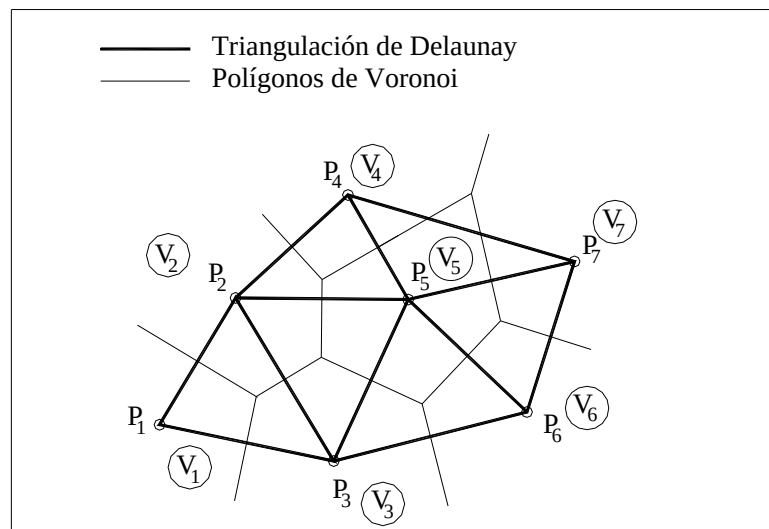


Figura nº 1. Triangulación

Uniando las parejas de puntos P_i, P_j que comparten un lado de uno de los polígonos de Voronoi, se obtiene una malla triangular. Las propiedades más importantes de esta red triangular son:

- La circunferencia circunscrita a un triángulo no contiene ningún otro punto del conjunto inicial (figura nº 2).
- Dados dos triángulos adyacentes, los cuatro vértices que los componen forman un cuadrilátero, la diagonal más corta será la que forme el lado común, es decir que los ángulos de los triángulos serán máximos (figura nº 2).

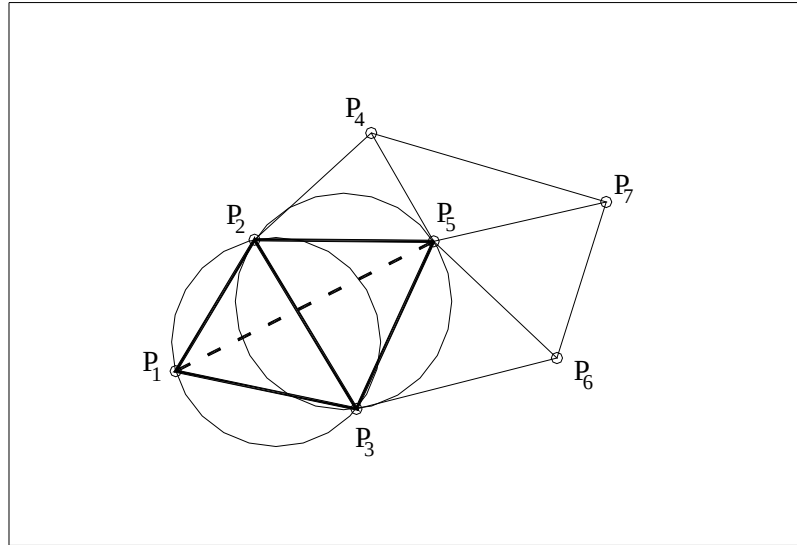


Figura nº 2. Propiedades de la red

4. ALGORITMOS DE INTERPOLACIÓN

De los modelos expuestos anteriormente, a continuación se desarrollan, esquemáticamente, algunos de los algoritmos que utilizan.

Gravitacional

Consiste en ponderar con mayor peso a los puntos más cercanos al punto a interpolar, existiendo diferentes variantes según el exponente de la función interpoladora.

$$Z(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{z_i}{d_i^p}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i^p}} \quad [1]$$

siendo,

n el número de puntos que influyen en la interpolación.

p el exponente de la función. Un buen valor, contrastado por la experiencia, es $p=2$.

d_i la distancia del punto P_i al punto a interpolar.

z_i la cota de cada punto que interviene en la interpolación.

Splines, B-splines y NURBS

Este algoritmo ajusta una curva suave a un conjunto de puntos conocidos, ‘curva adaptativa’, obligando a que pase por cada uno de los puntos. Si la función de interpolación es la ‘B-spline’ racional no uniforme (NURBS), en inglés ‘non-uniform rational B-spline’, su formulación es la siguiente:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} w_i N_{i,k}(u) P_i}{\sum_{i=0}^{i=n} w_i N_{i,k}(u)} \quad [2]$$

donde,

u es un parámetro.

$N_{i,k}$ es la función base de grado k .

P_i son los puntos de control.

w_i son los pesos.

La curva, así definida, tiene $n+1$ puntos de control con sus correspondientes pesos, también $n+1$, y el grado de la misma es k , necesitándose $n+k+2$ nodos. El vector de parámetros es:

$$U = \{u_0, \dots, u_0, u_1, \dots, u_1, u_n, \dots, u_n\}$$

$u_0, \dots, u_0$ ($k+1$) valores

$u_1, \dots, u_1$ ($k+1$) valores

...

...

$u_n, \dots, u_n$ ($k+1$) valores

es decir, hay $n+1$ grupos de parámetros que a su vez están formados por $k+1$ valores, luego su cantidad total es $n+k+2$.

La función base $N_{i,k}$ viene dada por las expresiones:

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t-t_i)N_{i,k-1}(t)}{t_{i+k-1}-t_i} - \frac{(t_{i+k}-t)N_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k}-t_{i+1}} \quad [3]$$

$$N_{i,1}(t) = 1 \quad \text{si } t_i \leq t < t_{i+1} \quad [4]$$

$$N_{i,1}(t) = 0 \quad \text{en cualquier otro caso} \quad [5]$$

siendo,

k el grado de la curva.

t el vector de parámetros, cuya estructura es análoga a la indicada anteriormente para el parámetro u .
 t_i los nodos.

Polinomios de grado 'n'

Se trata de encontrar una función f tal que:

$$\forall P(x, y) \in D, \quad z_p = f(x, y) \quad [6]$$

la función f es de la forma: $f = \text{Polinomio}(x, y)$. La interpolación más sencilla es la correspondiente a un polinomio de primer grado cuya expresión será:

$$f(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \quad [7]$$

Si se aumenta el grado del polinomio, será factible conseguir que, además de ser continua la función, sean continuas sus derivadas. En el caso particular de un polinomio de segundo grado, la expresión del interpolante será:

$$f(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 \quad [8]$$

Geoestadísticos (Kriging)

El primer paso en el 'kriging' ordinario consiste en elaborar el variograma a partir de la nube inicial de puntos. El variograma consta de dos partes: una parte experimental y una parte del modelo matemático. Sea z el valor de la cota a interpolar, el variograma experimental se genera calculando la varianza (σ^2) de cada punto del conjunto con respecto a los demás puntos [9].

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{2} (z_i - z_j)^2 \quad [9]$$

Una vez calculadas la varianzas, se procede a representarlas en relación con las distancias entre los puntos (figura nº 3).

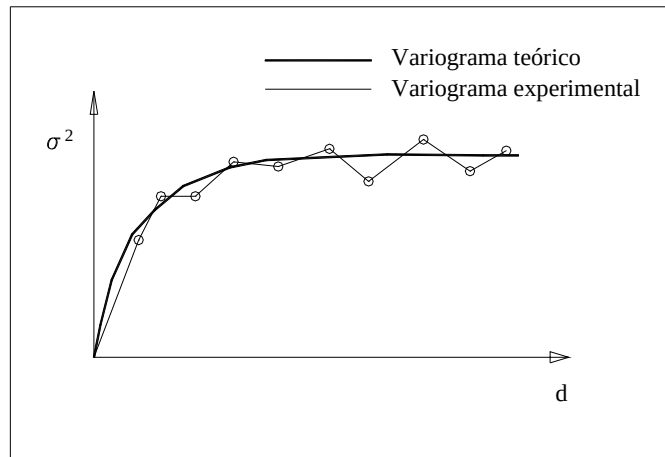


Figura nº 3. Variogramas

El variograma teórico o del modelo, se genera mediante ajuste estadístico y es el que se utilizará en los cálculos de interpolación y extrapolación de cotas. El variograma indica que los puntos próximos tienen valores de las varianzas parecidas, a partir de una cierta separación, las varianzas dejan de ser parecidas, sin embargo su media sí presenta una tendencia constante. El variograma teórico se utiliza para calcular los pesos de ponderación que se usará el proceso. La ecuación básica es:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n w_i z_i \quad [10]$$

donde,

n es el número de puntos de partida.

z_i es la cota de cada punto.

w_i es el peso asignado a cada uno de ellos.

La expresión [10] es básicamente igual a la [1], utilizada en los modelos gravitacionales, excepto que en vez de asignar los pesos en función inversa de la distancia elevada a una cierta potencia, el 'kriging' utiliza el variograma.

Si la suma de los pesos es la unidad, el 'krigeado' se denomina ordinario, si no se impone esta condición el proceso de 'krigeado' se denomina simple. El Universal se refiere a la cualidad de estudiar e imponer la tendencia de los datos, esto es, el estudio local de la varianza, o lo que es lo mismo, considerar que el variograma no es estático y que puede ser adaptado a las variaciones locales que se produzcan.

5. CARACTERÍSTICAS

Cada uno de los modelos expuestos en este documento tiene ventajas e inconvenientes a la hora de ser aplicados en un trabajo topográfico real. En general, los puntos reales del terreno que definen la base de partida para la generación de los modelos digitales, deberían formar parte del propio modelo, de tal forma que la cota asignada a un punto del modelo coincidente con uno real, fuese la misma. Esta característica solo se consigue en los modelos basados en la red irregular de triángulos. Sin embargo, a la hora de producir las curvas de nivel, los modelos basados en la malla rectangular regular, producen unos resultados muy aceptables, tanto desde el punto de vista de su apariencia como desde el punto de vista de la velocidad de cálculo.

La calidad de los resultados obtenidos con cualquiera de los modelos depende fundamentalmente de la calidad de los datos de partida, es decir del conjunto de puntos tomados realmente. Una mala distribución de los mismos, o una indeterminación por falta de datos, hace que el resultado del modelo digital se aparte rápidamente de la morfología que realmente tiene la zona modelizada.

Cuando un modelador genera una curva de nivel de forma artificial, posiblemente, por las razones expuestas anteriormente, se dice que produce artefactos ('artifacts'). Es raro el trabajo en el que no se produzcan estos fenómenos, incluso aplicando cualquier algoritmo, sobre todo, en los bordes del dominio a modelizar. Esta es la razón por la que habitualmente, las aplicaciones disponen de herramientas de edición de datos que ayudan a generar un modelo digital más real.

Muchos de los algoritmos disponen de parámetros de ajuste que permiten variar las condiciones de trabajo de la función de interpolación, por ejemplo, en el caso de un algoritmo gravitacional, es posible variar la influencia de la distancia asignando diversos valores a la potencia de la misma. Aunque habitualmente se suele ajustar al cuadrado, se puede cambiar por otras potencias si las circunstancias del problema lo requieren. En este mismo ejemplo, el número de puntos vecinos que intervienen en la ponderación del punto a interpolar, también puede ser variado a través del ajuste del radio de influencia. Puntos más allá del radio de influencia no intervendrán en el proceso de interpolación. En las tablas nº 2 y nº 3, se muestran algunas de las características más importantes de los diferentes modeladores y algoritmos.

Tabla nº 2. Resumen de características. Tipos de modelos

Tipo de modelo	Características
Por triangulación	Los puntos iniciales forman parte del modelo. Consumen tiempo de cálculo en la generación de la red. La calidad y apariencia de las curvas de nivel dependen del tipo de interpolante.
Por malla regular	Los puntos iniciales no forman parte del modelo. Rapidez de ejecución y buena apariencia de las curvas de nivel.
Por secciones radiales	Consumen muchos recursos cuando el número de radiaciones es elevado. Producen buenos resultados en cuanto al curvado e interpolación.
Por curvas de nivel	La interpolación puede llegar a ser muy costosa e incluso pueden existir zonas de indeterminación

Tabla nº 3. Resumen de características. Tipos de algoritmos

Tipo de algoritmo	Características
Gravitacional	Si los puntos de partida no son aceptables, genera gran cantidad de artefactos. Las curvas de nivel necesitan ser suavizadas mediante otras técnicas.
Geoestadísticos	Las curvas de nivel se generan rápidamente y con un aspecto muy agradable, como si hubiesen sido calculadas manualmente. Solo suelen aparecer artefactos en los bordes del dominio.
Curvatura mínima (Splines biarmónicas)	Produce curvas de nivel muy suaves. Es necesario que al menos haya un punto aceptable en cada celda de la malla regular. Los artefactos suelen aparecer en los bordes del dominio.
Polinómicos	Producen muy buenos resultados cuando se trata de interpolantes con continuidad C^1 . En algunos casos de geometría muy específica puede perder la continuidad en las tangentes, es decir que muestran picos.

A continuación se muestran tres ejemplos de modelización digital del mismo terreno utilizando diferentes algoritmos matemáticos.

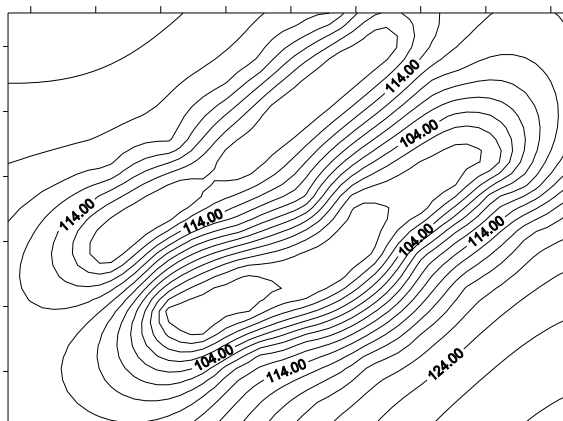


Figura nº 4. Krigado con variograma lineal

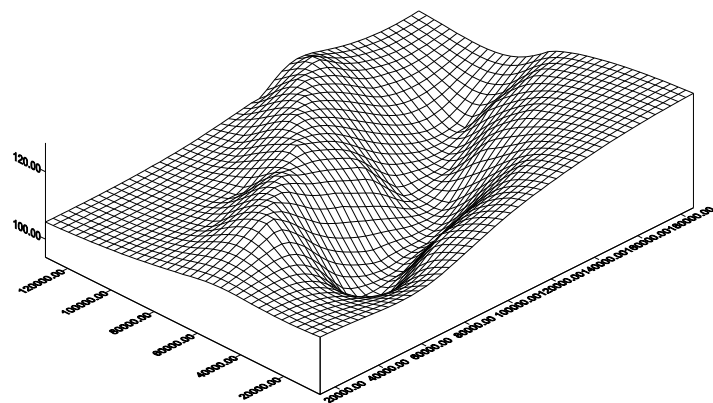


Figura nº 5. Perspectiva del krigado

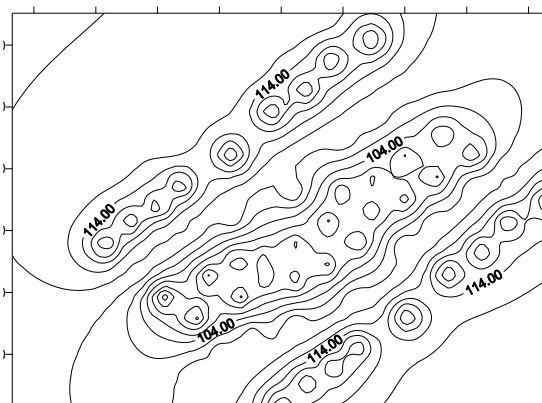


Figura nº 6. Gravitacional con potencia igual a dos

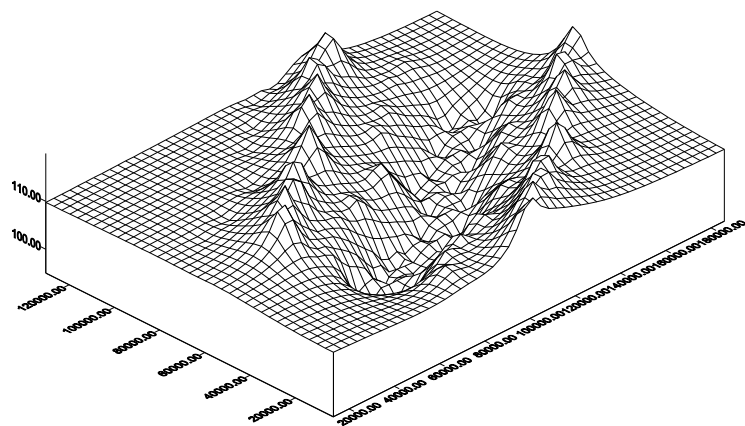


Figura nº 7. Perspectiva del gravitacional

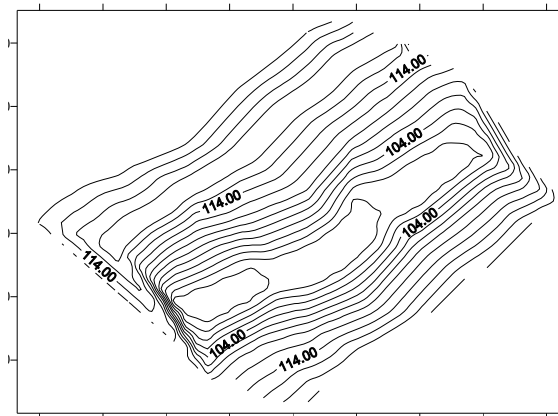


Figura nº 8. Interpolación polinómica lineal

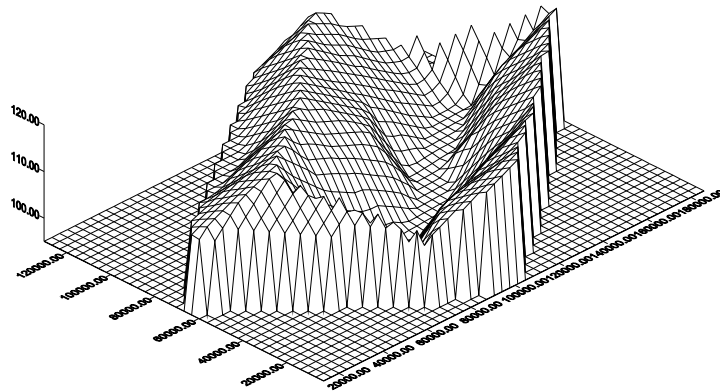


Figura nº 9. Perspectiva de la interpolación polinómica lineal

6. ADQUISICIÓN DE DATOS Y GENERACIÓN DEL MODELO DIGITAL

Aunque no hay una regla general que pueda aplicarse a este tema, a continuación se indican las técnicas que mejor se adaptan a cada tipo de modelo digital.

MODELOS RASTER

- Imágenes de satélite
- Escáner de imágenes existentes en papel
- Radar apertura sintética (DinSAR, InSAR, GbSAR, ...)

MODELOS VECTORIALES

- Taquimétrico (ET, Fotogrametría y restitución, GPS)

- Archivo de puntos (LiDAR, LaserScan,...)
- Escáner y vectorización de datos existentes en papel

Atendiendo a la tecnología utilizada en la adquisición de datos:

MÉTODOS DIRECTOS (Medida directa de la cota o altitud):

- Estación Total (ET), GPS, LIDAR, LaserScan...

MÉTODOS INDIRECTOS (Medida sobre imágenes u otros medios):

- Fotogrametría digital
- Estereoidágenes de satélites
- Interferometría radar (DinSAR, InSAR, ...)
- Escaneo de imágenes y vectorización manual o automática
- Digitalización sobre pantalla

7. EJEMPLOS



Figura nº 10. LiDAR aerotransportado y datos capturados

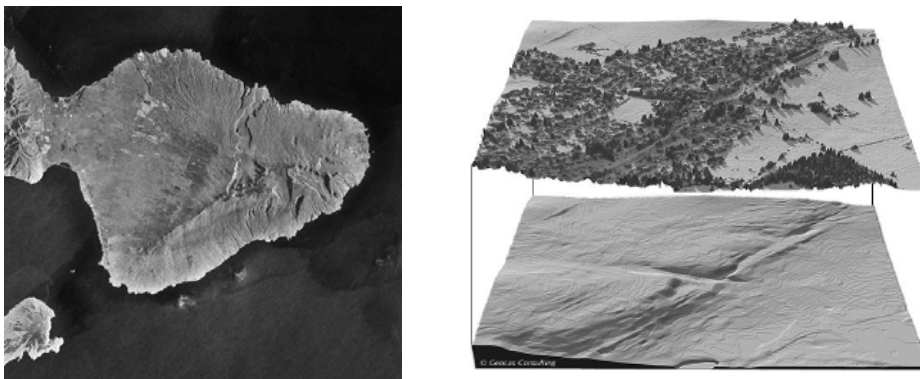


Figura nº 11. RADARSAT (Japón). Datos LiDAR de bosque. Encima (MDS) y su correspondiente suelo forestal (MDT)

[Cortesía Geolas]

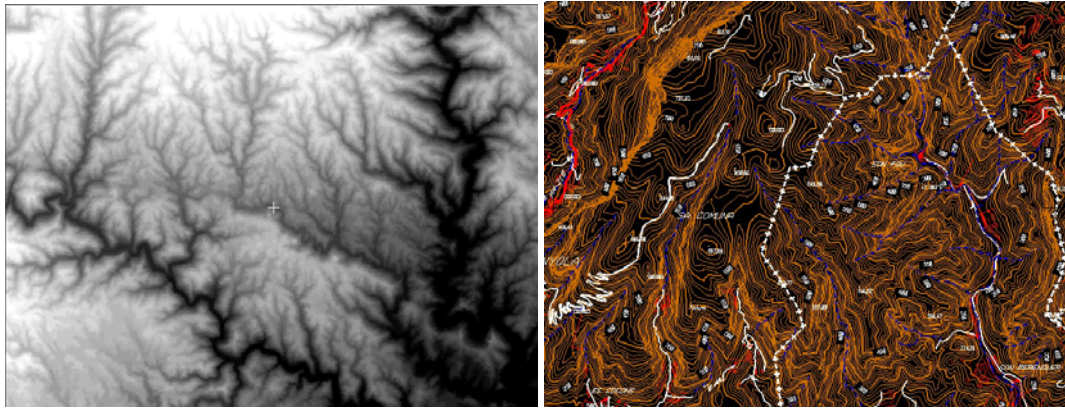


Figura nº 12. Raster: Oeste de Sevilla, paso de malla 20 m. Vectorial: Mallorca, curvado MTN25

8. ÁMBITO Y PRECISIONES ESPERADAS

A modo orientativo se adjunta la tabla nº 4 en la que se muestran los valores máximo y mínimo del error cuadrático medio para cada técnica de adquisición. Dada la disparidad entre altimetría y planimetría se ha optado por separar ambos valores.

Tabla nº 4. Precisiones en la generación del DTM según técnica utilizada. Ámbito

Técnica de adquisición	Ámbito	Precisión (RMSE en cm)	
		Planimetría	Altimetría
LiDAR (aerotransportado)	Local / regional	25-50	15-25
InSAR	Regional / nacional	Varios metros	
Fotogrametría aérea	Local / regional	15-25	35-75

BIBLIOGRAFÍA

Carrara, A. et al. Comparison of techniques for generating digital terrain models from contour lines. International Journal of Geographical Information Science, 2001.

Echegoyen Martín, T. et al. Trazado de curvas de nivel sobre redes de polígonos convexos. Mapping, 2001.

Echegoyen Martín, T. et al. Digital Bathimetric Models from rational Profiles. Surveing and Land Information Science, 2004.

Felicísimo Pérez, A.M. Modelos Digitales del Terreno. Universidad de Oviedo, 1994.

Hossein Arefi. Automatic generation of digital terrain models from cartosat-1stereo images. German Aerospace Center (DLR). D-82234 Wessling, Germany, 2010.

Kande R.M.U. Bandara. Automated Generation of Digital Terrain Model using Point Clouds of Digital Surface Model in Forest Area. Remote Sensing, 2011.

Martínez Marín, R. Generación automática de una malla triangular. Mapping, 2000.

Martínez Marín, R. Generación automática de curvas de nivel (isolíneas) suavizadas. Topografía y Cartografía, 2001.

Martínez Marín, R., et al. Análisis de las metodologías habituales para la generación de modelos digitales del terreno. Mapping, 2001.

Martínez Marín, R., et al. Desarrollo matemático de un interpolante cúbico y su aplicación a los modelos digitales del terreno. Topografía y Cartografía, 2001.

Martínez Marín, R., et al. Los elementos finitos y su aplicación a los modelos digitales del terreno. Revista de Obras Públicas, 2002.

Wack, R. Digital terrain models from airborne laser scanner data - A grid based approach. Joanneum Research, Institut of Digital Image Processing, Wastiangasse. Austria, 2003.