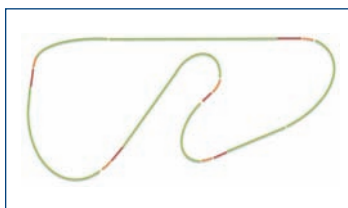


Técnicas de trazado de circuitos para carreras



Layout design of racing circuits

Sandro Rocci
Profesor Emérito
Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

El autor, proyectista de los circuitos permanentes españoles de Jarama (1964) y Jerez (1983) en los que se han corrido pruebas de Fórmula-1, explica cómo se relaciona el trazado de una pista con la definición geométrica de la trayectoria más rápida inscrita en aquella. También recuerda el modelo matemático de las prestaciones máximas de un vehículo por él desarrollado, y explica cómo se utiliza para trazar el diagrama de las máximas velocidades a lo largo de la citada trayectoria.

PALABRAS CLAVES: pista, circuito, aceleración, deceleración, clotoide, resistencia al deslizamiento.

Abstract

The author has designed the F-1 Spanish circuits Jarama (1964) and Jerez (1983). He explains how to relate the alignment of a racing track to the fastest trajectory inscribed in it. A model developed by him of the maximum performance of a car is also remembered, and it is explained how to use it to determine maximum speeds along the said trajectory.

KEY WORDS: : track, circuit, acceleration, deceleration, spiral transition, skidding resistance.

1. Introducción

Cuando en 1964 se me encargó, por parte del Real Automóvil Club de España, el proyecto de construcción del primer circuito permanente automovilístico de España (el del Jarama), contaba yo 27 años. Tenía ya alguna experiencia tanto en carreteras como en carreras; pero pronto pude comprobar que de poco me servirían puesto que, sorprendentemente, ambos mundos tenían pocos puntos de contacto. Así que terminé labrando mis propias herramientas:

- Ante todo, tenía que determinar un trazado por el que las ruedas de un vehículo de competición, en un régimen de máximas prestaciones, no sufrieran deslizamientos sobre el pavimento.
- A continuación, había que relacionar la geometría de la pista con esa trayectoria.
- Por último, tuve que desarrollar un modelo de las velocidades alcanzadas por un vehículo de competición en un régimen de máximas prestaciones, ya que las medidas de seguridad de un circuito dependen de la velocidad en cada punto de la trayectoria.

Con muy pocas excepciones, el desarrollo de estas herramientas ha estado disperso entre diversos documentos, la mayoría de los cuales no ha alcanzado difusión alguna. Y ahora que mi edad alcanza su plenitud, he pensado que quizás debería plasmarlos de una manera algo sistematizada, para que otros puedan aprovechar mi experiencia y avanzar más en este nicho de la tecnología viaria que, si bien es muy especializado, me ha proporcionado comprender mejor el más frecuente funcionamiento de la circulación ordinaria.

Aprovecho, por consiguiente, el amable ofrecimiento de la Asociación Técnica de Carreteras, a la que he dedicado muchas y satisfactorias horas, de contribuir a su difusión.

2. La trayectoria

Cuando un vehículo de competición discurre por una trayectoria recta, sus neumáticos no tienen que movilizar rozamiento transversal alguno para inscribirle en una trayectoria curva: luego sólo actúa un rozamiento longitudinal para acelerar y frenar.

A partir de una velocidad dada, para minimizar el tiempo por vuelta lo que interesa al conductor es acelerar lo más posible, para recorrer lo que le queda de recta a la mayor velocidad posible en cada punto subsiguiente, minimizando el tiempo de recorrido de cada segmento elemental. Los límites de esta aceleración son dobles:

- Las posibilidades del vehículo para transmitir la potencia de su motor a las ruedas: lo que se llaman las prestaciones del vehículo, que son características de éste. A este tema se dedica el Capítulo 4 de este documento.
- Las posibilidades de las ruedas para transmitir el empu-

je generado por el motor al pavimento, a través de un mecanismo de rozamiento rodante. Los avances de la tecnología de los neumáticos de competición, que son determinantes para lograr este objetivo, combinados con la mayor presión sobre el pavimento que proporcionan los dispositivos aerodinámicos que se emplean, permiten movilizar en la mayoría de los casos unos coeficientes de rozamiento ampliamente suficientes¹ (del orden de 2,0 y aun más) para que sean las prestaciones del vehículo las que representan una limitación de la aceleración.

Cuando el vehículo se acerca a una curva que habrá de ser recorrida a una velocidad inferior a la de aproximación a ella en recta, habrá de intervenir una deceleración, por la acción de los frenos. Aunque teóricamente es posible movilizar un rozamiento límite que tenga a la vez componentes longitudinales y transversales², y la destreza de los pilotos sea capaz de controlar esta inestable situación, suponer que esta frenada tiene lugar donde la trayectoria es todavía recta no introduce una desviación excesiva respecto de la realidad, y además permite simplificar algo los de por sí complicados cálculos que se exponen más adelante.

A partir del final de la frenada (y de la recta), el conductor gira el volante hasta alcanzar el mínimo radio de curvatura que corresponde a esa curva; si lo gira a velocidad constante³, el vehículo describirá una clotoide. Durante ese intervalo de espacio y tiempo, el vehículo sólo estará retenido por su motor, cuyo acelerador estará en principio cerrado. Para caracterizar esta fase, durante el otoño de 1963 realizamos unos ensayos en la carretera (entonces casi abandonada y muy poco frecuentada) que hoy se llama M-115, de la N-II a la Base aérea de Torrejón. Por medio de un conjunto de cronometradores de la Federación Española de Automovilismo, se registraron los tiempos de pasada de un Porsche 956 de mi amigo Isaac Espinosa, retenido sólo por el motor a partir de diversas velocidades. La conclusión que se sacó fue que la fase de retención abarca un recorrido muy corto, del orden de 10 – 15 m.

En el punto de máxima curvatura el radio será R (m) y, si el peralte es p (%), la velocidad V (km/h) compatible con la movilización de un rozamiento transversal f_t está dada por la conocidísima fórmula

$$V = \sqrt{127 \cdot R \cdot \left(\frac{p}{100} + f_t \right)}$$

Sólo hay que estimar el valor de f_t ; aplicando el mismo razonamiento que para el rozamiento longitudinal, suelo utilizar el valor 2,0; pero se cambia con facilidad si la experiencia demuestra otra cosa.

¹ Posiblemente la única excepción sea el momento de la salida, en el que el vehículo está parado.

² Ligados por la clásica fórmula elíptica.

³ Se puede admitir en primera aproximación.

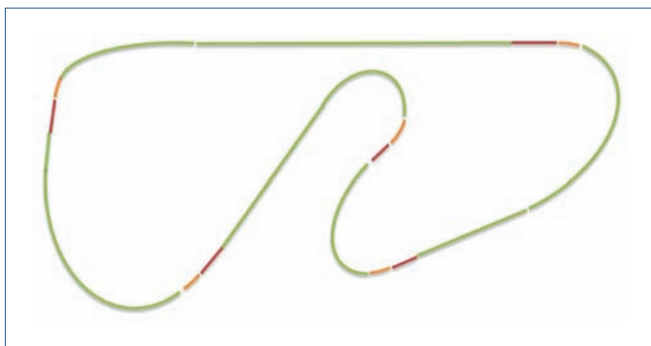


Figura 2-A.

No interesa que el radio **R** abarque una zona larga, puesto que mientras se mantenga el mismo radio no se puede acelerar. Para que la recta siguiente a esa curva sea recorrida en menos tiempo, interesa que se reduzca a un punto la circunferencia (clotoides de vértice) y que se acelere lo más posible en la muy larga clotoide de salida, de manera que se llegue a su final (tangente de salida) y se entre en la recta siguiente a la mayor velocidad posible. Una vez más, los límites de esta aceleración son dobles:

- Las posibilidades del vehículo para transmitir la potencia de su motor a las ruedas: lo que se llaman las prestaciones del vehículo, que son características de éste.
- Las posibilidades de las ruedas para transmitir el empuje generado por el motor al pavimento, a través de un mecanismo de rozamiento rodante. Al principio de la aceleración, la presencia de un importante rozamiento transversal previene la movilización de todo el rozamiento longitudinal⁴; pero en la mayoría de los casos la resistencia al deslizamiento es ampliamente suficiente para que sean las prestaciones del vehículo las que representen una limitación de la aceleración.

De esta manera la trayectoria se esquematiza como una reiteración cerrada de elementos sucesivos (Fig. 2-A), formados cada uno por:

- Una recta, en cuya parte final se realiza la frenada. Para ello se parte de la velocidad en la curva y se retrocede.
- Una clotoide de entrada de unos 10 – 15 m de longitud, recorrida a la velocidad correspondiente a su radio mínimo **R**. Su desarrollo angular es

$$\alpha_L \text{ (rad)} = \frac{L}{2R}$$

siendo **L** (m) la longitud de la clotoide.

- Una clotoide de salida que parta de ese radio mínimo y recoja el resto del desarrollo angular de la curva: con estas dos condiciones queda perfectamente determinada.

3. Cómo disponer la pista

A diferencia de lo que ocurre en una carretera, en la que la trayectoria del vehículo se ciñe a la forma del carril por el que circula, en una pista de carreras el vehículo ocupa, dentro de la anchura de ésta, la posición transversal que más le conviene a su conductor para reducir al mínimo el tiempo de recorrido, siempre que su trayectoria no se acerque a menos de 1 m del borde de la pista⁵. Existe así una "trayectoria más rápida" dentro de una pista dada, cuya definición⁶ suele constar de alineaciones rectas y circulares (el mundo del automovilismo deportivo no presta atención a las clotoides): sí, pero... ¿cómo relacionar la una con la otra?

En vez de empeñarme en optimizar la trayectoria dentro de una pista dada, resolví el problema al revés: partiendo de una trayectoria, dispuse una pista de anchura **d** alrededor de ella, de manera que sus bordes quedaran a una distancia **f** de la trayectoria.

Esto da origen a tres casos básicos:

- a) La trayectoria tiene forma de S: una recta de longitud **T₁₂**, a la que se llega mediante una clotoide de parámetro **A₁**, y de la que se sale mediante otra clotoide de parámetro **A₂** y sentido de giro inverso (Fig. 3-A). Si llamamos **α** (rad) al ángulo que forma la recta de la trayectoria con los bordes de la pista, es fácil comprobar la condición de que la trayectoria pase a una distancia **f** de los bordes:

$$(d - 2f) \cos \alpha = [T_{12} + (x_1 + x_2) + 2f \cdot \sin \alpha] \operatorname{tg} \alpha - (y_1 + y_2)$$

Según que los puntos de mínima distancia de la trayectoria a uno de los bordes de la pista estén o no dentro de la correspondiente clotoide, las definiciones de **x** e **y** varían.

En el primer caso, denominando **1** a la distancia del citado punto al de curvatura nula:

$$1 = A \sqrt{2\alpha}$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^5 + \dots + \frac{(-1)^i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{4i+1}}{(4i+1)(2i)!} = \sqrt{\alpha} - \frac{(\sqrt{\alpha})^5}{10} + \dots + \frac{(-1)^i (\sqrt{\alpha})^{4i+1}}{(4i+1)(2i)!}$$

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^7 + \dots + \frac{(1)^i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{4i+3}}{(4i+3)(2i+1)!} = \frac{(\sqrt{\alpha})^3}{3} - \frac{(\sqrt{\alpha})^7}{42} + \dots + \frac{(-1)^i (\sqrt{\alpha})^{4i+3}}{(4i+3)(2i+1)!}$$

⁴ Están ligados por la clásica fórmula elíptica.

⁵ Esto lo sugería el Anexo O al Código Deportivo Internacional... de entonces, que se ocupaba de la medición de la longitud de las pistas. La versión actual se ha replegado sobre el eje o punto medio de la pista: cosa que no es de extrañar, a la vista de las complicaciones matemáticas expuestas en este documento.

⁶ A lo largo del eje o centro de la calzada.

Si uno de esos puntos de mínima distancia de la trayectoria a uno de los bordes de la pista está más allá de la correspondiente clotoide, dentro de una circunferencia cuyo radio es R^7 :

$$L = \frac{A^2}{R}$$

$$\alpha_L = \frac{\left(\frac{A}{R}\right)^2}{2}$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5}{10} + \dots + \frac{(-1)^i \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4i+1}}{(4i+1)(2i)!} = \sqrt{\alpha} - \frac{(\sqrt{\alpha})^5}{10} + \dots + \frac{(-1)^i (\sqrt{\alpha})^{4i+1}}{(4i+1)(2i)!}$$

$$\frac{y_L}{\sqrt{2}} \approx \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^7}{42} + \dots + \frac{(1)^i \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4i+3}}{(4i+3)(2i+1)!} = \frac{(\sqrt{\alpha_L})^3}{3} - \frac{(\sqrt{\alpha_L})^7}{42} + \dots + \frac{(-1)^i (\sqrt{\alpha_L})^{4i+3}}{(4i+3)(2i+1)!}$$

$$x_0 = x_L - R \cdot \sin \alpha_L$$

$$\Delta R = y_L - R(1 - \cos \alpha_L)$$

$$x = x_0 + R \cdot \sin \varphi$$

$$y = (R + \Delta R) - R(1 - \cos \varphi)$$

Conviene cerciorarse de que el número de términos que se toman en los desarrollos en serie proporciona una precisión suficiente.

En la práctica, se puede dar algún caso en el que uno de los puntos de mínima distancia de la trayectoria a uno de los bordes de la pista se halla sobre otra clotoide, situada al otro lado de la circunferencia de radio R . La construcción de una figura equivalente a la Fig. 3-A, y la deducción de las correspondientes ecuaciones, no presentan dificultad; pero no se han incluido aquí.

La ecuación que expresa la condición de paso de la trayectoria a una distancia f de los bordes se resuelve rápidamente por tanteos en α o en φ según el caso, empleando Excel u otro programa similar.

- b) La trayectoria consta de una recta de longitud T_{12} , suficientemente larga, a la que se llega mediante una clotoide de salida, de parámetro A_1 , y de la que se sale mediante otra clotoide de entrada, de parámetro A_2 . El giro en ambas clotoides, al recorrerlas, es del mismo sentido. En este caso los bordes de la pista son paralelos a la recta; y el borde más lejano de la trayectoria es el que corresponde al lado hacia donde se desarrollan las clotoides.
- c) Se supone que, mediante los algoritmos descritos en los casos a) o b), se han determinado dos parejas de bordes rectos de la pista. Las correspondientes partes rectas de la trayectoria definen un vértice V , en el que se forma entre ellas un ángulo de giro ω (rad). La distancia entre el origen de coordenadas⁸ y la intersección entre las dos partes rectas de la trayectoria la llamaremos T (Fig. 3-B).

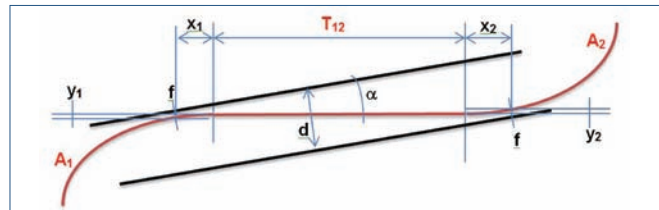


Figura 3-A.

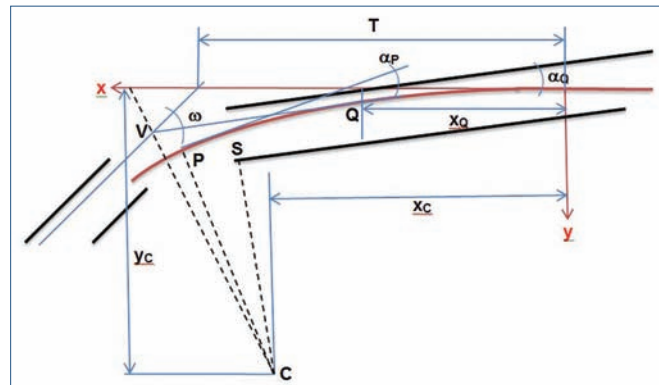


Figura 3-B.

En correspondencia con este vértice hay una pareja de clotoides de vértice: una de entrada y otra de salida, mucho más larga. Se trata de encajar unos bordes, esta vez circulares concéntricos de separación d , el interior de los cuales pasa a una distancia f de un punto P de la trayectoria.

Por el lado de la clotoide de mayor longitud⁹, cuyo parámetro es A , el punto Q de la clotoide determina el borde recto¹⁰. Las coordenadas del vértice están determinadas, y valen

$$x_v = \frac{T \cdot \operatorname{tg} \omega - x_Q \cdot \operatorname{tg} \alpha_Q + y_Q}{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \alpha_Q}$$

$$y = y_v + \frac{x_v - x}{\operatorname{tg} \left(\alpha_Q + \frac{\omega}{2} \right)}$$

y la ecuación de la bisectriz del ángulo que se forma en V será

$$y = y_v + \frac{x_v - x}{\operatorname{tg} \left(\alpha_Q + \frac{\omega}{2} \right)}$$

⁷ Tiene que haber en la trayectoria una circunferencia de longitud no nula. Es entonces $\varphi > \alpha_L$.

⁸ El origen del sistema de coordenadas está en el punto de curvatura nula de la clotoide, y su eje de abscisas corresponde a la tangente en éste.

⁹ Que suele ser la de salida.

¹⁰ Mediante los algoritmos descritos en los casos a) o b).

En el punto **P** de la clotoide en el que la distancia entre la trayectoria y el borde interior es mínima¹¹, la tangente a la trayectoria forma un ángulo α_p con el eje de abscisas. A partir de ese ángulo se pueden calcular las coordenadas x_p, y_p como en el caso a). La ecuación de la normal a la clotoide en **P** será

$$y = y_p + \frac{x_p - x}{\tan \alpha_p}$$

La normal y la bisectriz se cortarán en el punto **C**:

$$x_c = \frac{(y_p - y_v) + x_p \cdot \cotg \alpha_p - x_v \cdot \cotg \left(\alpha_Q + \frac{\omega}{2} \right)}{\cotg \alpha_p - \cotg \left(\alpha_Q + \frac{\omega}{2} \right)}$$

La distancia entre **C** y **P** será

$$\overline{CP} = \frac{x_p - x_c}{\sin \alpha_p}$$

mientras que la distancia entre **C** y **V** será

$$\overline{CV} = \frac{x_v - x_c}{\sin \left(\alpha_Q + \frac{\omega}{2} \right)}$$

La distancia de **C** al borde recto interior será

$$\overline{CS} = \overline{CV} \cdot \cos \omega - (d - f)$$

y para que la circunferencia tangente a ese borde interior en el punto **S** pase a una distancia **f** del punto **P**, ha de ser Este sistema de ecuaciones se resuelve por tanteos en α_p , empleando Excel u otro programa similar.

$$\overline{CS} = \overline{CP} - f$$

Puede haber otras configuraciones en las que la trayectoria "toque" a los bordes formando configuraciones algo más complicadas que las descritas; pero pueden ser resueltas en cada caso aplicando los mismos principios. Aquí no se incluyen para no complicar excesivamente el texto.

4. Las prestaciones

4.1. La ley de empujes

En una ya lejana publicación¹² de 1976, desarrollé un modelo del movimiento de un vehículo de competición en una rasante horizontal y en condiciones de prestaciones máximas, a partir de una ley de empujes - velocidades deducida con las siguientes hipótesis:

- Si la velocidad es nula (al arrancar), V_0 , el empuje es igual al máximo: f_0 .
- Al alcanzar la velocidad máxima en llano $V_{máx}$, ya no queda empuje para acelerar: $f = 0$.
- Entre los dos extremos anteriores, la ley de empujes - velocidades es hiperbólica, de la forma siguiente

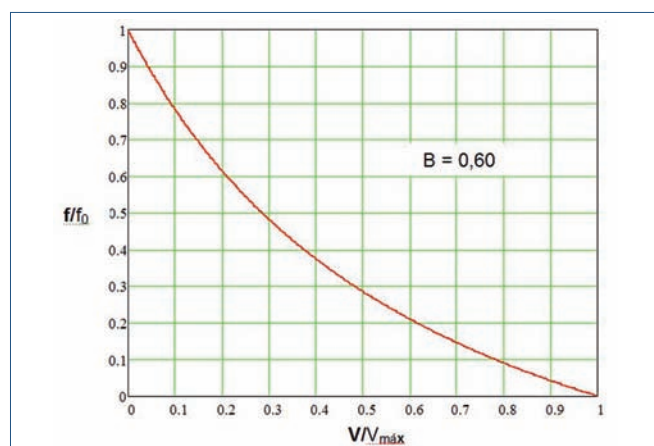


Figura 4-A.

$$\frac{f}{f_0} = \frac{(1-B) \cdot b}{1-B \cdot b}$$

siendo

$$b = 1 - \frac{V}{V_{máx}}$$

y f_0 y **B** unas constantes propias del vehículo (Fig. 4-A).

4.2. La ley de tiempos

Sustituyendo el empuje dado por la ley anterior en la ecuación diferencial del movimiento del vehículo en un plano con inclinación i (%)

siendo M la masa (kg) del vehículo, y g la aceleración de la gravedad (m/s^2), se obtiene la ecuación diferencial que rela-

$$\frac{dV}{dt} = 3,6 \left(\frac{f}{M} - g \cdot \frac{i}{100} \right)$$

ciona la velocidad V alcanzada (a través de **b**) con el tiempo transcurrido t :

En el artículo de 1976 sólo traté del caso de la rasante horizontal ($i = 0$); en otro posterior¹³ traté el caso general,

$$-\frac{V_{máx}}{3,6} \frac{db}{dt} = \frac{f_0 \cdot (1-B) \cdot b}{M \cdot 1-B \cdot b} - g \cdot \frac{i}{100}$$

que se resume a continuación. Definiendo un parámetro auxiliar propio del vehículo y de la rasante

$$b_0 = \frac{\frac{g \cdot \frac{i}{100}}{f_0}}{1 - B \cdot \left(1 - \frac{\frac{g \cdot \frac{i}{100}}{f_0}}{M} \right)}$$

¹¹ E igual a f .

¹² Estudio de las prestaciones de un vehículo de competición. Revista de Obras Públicas, enero de 1976.

¹³ Un modelo de las máximas prestaciones de un vehículo. Revista Rutas nº 66 (1998).

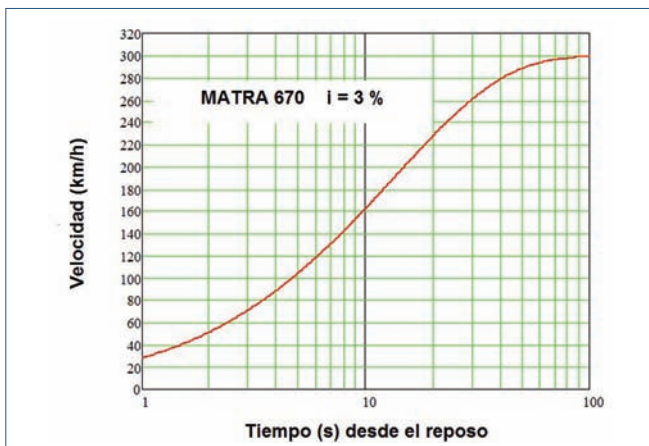


Figura 4-B.

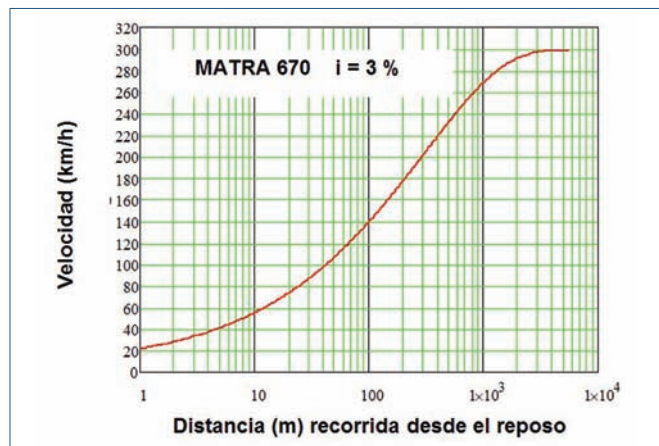


Figura 4-C.

la ecuación diferencial queda así

$$\frac{\frac{f_0}{M}}{\frac{V_{\max}}{3,6}} \cdot dt = - \frac{1 - B \cdot b}{\frac{g \cdot 100}{f_0} \left(\frac{b}{b_0} - 1 \right)} \cdot db$$

Integrando a partir del reposo ($t = V = 0$), se obtiene la ley que relaciona la velocidad alcanzada con el tiempo transcurrido:

$$-\frac{g \cdot 100}{b_0 \cdot \frac{V_{\max}}{3,6}} \cdot t = B \cdot (1 - b) + (1 - B \cdot b_0) \cdot \ln \frac{b - b_0}{1 - b_0}$$

Por ejemplo, en el artículo de 1976 se daban datos para el vehículo MATRA 670, que ganó en 1972 las 24 horas de Le Mans (Fig. 4-B):

- $V_{\max} = 310$ km/h
- $B = 0,60$
- $f_0/M = 21,38$ N/kg
- $b_0 = 0,0337$ para $i = 3 \%$

4.3. La ley de recorridos

Recordando que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V}{3,6} \cdot \frac{dV}{ds} = -3,6 \left(\frac{V_{\max}}{3,6} \right)^2 \cdot (1 - b) \cdot \frac{db}{ds}$$

siendo s (m) el camino recorrido, la ecuación diferencial desarrollada en el apartado anterior se convierte en

$$(1 - b) \cdot \frac{db}{ds} + \frac{\frac{f_0}{M} \cdot (1 - B) \cdot \frac{b}{1 - B \cdot b_0} - \frac{g \cdot 100}{\left(\frac{V_{\max}}{3,6} \right)^2}} = 0$$

que se transforma en

$$\frac{\frac{g \cdot 100}{b_0 \left(\frac{V_{\max}}{3,6} \right)^2} \cdot ds}{d(b - b_0)} = [B(1 - b_0) + (1 - B \cdot b_0)] + B(b - b_0) - \frac{(1 - b_0)(1 - B \cdot b_0)}{b - b_0}$$

Integrando a partir del reposo ($t = V = 0$), se obtiene la ley que relaciona la velocidad alcanzada con el camino recorrido (Fig. 4-C):

$$-\frac{g \cdot 100}{b_0 \left(\frac{V_{\max}}{3,6} \right)^2} \cdot s = \left\{ 1 + B \left[(1 - b_0) - \frac{1 + b}{2} \right] \right\} \cdot (1 - b) + (1 - b_0)(1 - B \cdot b_0) \cdot \ln \frac{b - b_0}{1 - b_0}$$

Provistos de estas ecuaciones, y conociendo algunos datos de prestaciones reales (en llano) como pueden ser el tiempo invertido en recorrer 400 o 1000 m a partir del reposo, o el tiempo necesario para acelerar de 0 a 100 km/h, además de la velocidad máxima en llano, se pueden determinar las constantes propias del vehículo B y f_0/M .

En el artículo de 1998, para dimensionar carriles de aceleración, se estudiaron las prestaciones máximas de un vehículo de turismo Seat Sxi, de 100 CV de potencia y 180 km/h de velocidad máxima. Además, se estudiaron otros cuatro vehículos, llegando a las siguientes conclusiones para ellos:

- Aproximadamente es

$$\frac{f_0}{M} = \left(\frac{V_{\max}}{79} \right)^2$$

- B varía poco, entre 0,5 y 0,6.

5. Referencias bibliográficas

- [1] Código Deportivo Internacional. Fédération Internationale de l'Automobile, Paris.
- [2] Estudio de las prestaciones de un vehículo de competición. Revista de Obras Públicas, enero de 1976
- [3] Un modelo de las máximas prestaciones de un vehículo. Revista RUTAS nº 66 (1998). ♦