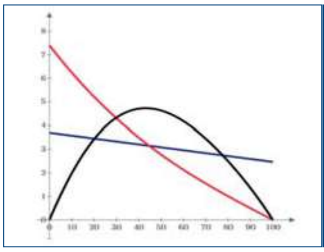
¡Decelerando antes de la curva!



Decelerating Before Reaching the Road Curve!

Sandro Rocci
Catedrático Emérito
Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

En el primero de una serie de artículos que va a dedicar a las curvas de transición en planta para carreteras, el autor examina las características dinámicas de diversos tipos de maniobra de deceleración, bajo dos enfoques:

a) Postular *a priori* una ley que relacione directamente la velocidad con el recorrido, y de ella deducir la deceleración.
b) Postular (también *a priori*) una ley que relacione directamente la deceleración con el recorrido, y de ella deducir la velocidad.

En ambos casos, se estudian leyes lineales, cuadráticas y cúbicas; y se extraen conclusiones sobre la influencia del tipo de ley considerado.

PALABRAS CLAVES: deceleración, velocidad.

Abstract

In the first paper of a series related to alignment transition curves, the Author analyzes the dynamics of several deceleration maneuvers, under two sets:

a) Given the speed - distance relationship, the deceleration law is deducted.
b) Given the deceleration – distance relationship, the speed law is deducted.

For both sets, several relationships are studied: linear, quadratic, cubic. Conclusions on the influence of the considered type of relationship are stated.

KEY WORDS: deceleration, speed.

1. Introducción

En el trazado en planta de una infraestructura lineal se decelera para pasar de una situación uniforme a otra más restrictiva (por ejemplo, de una alineación recta a otra circular), de manera que uno o varios parámetros relacionados con el movimiento de los vehículos varíen de una forma aceptable.

En la casi totalidad de los casos se llega a una circunferencia de radio R, dotada de un peralte P (%). Esto significa que a partir de ese punto está limitada superiormente la velocidad V (km/h) del vehículo

$$V = 3{,}6 \cdot \frac{ds}{dt}$$

siendo s (m) el camino recorrido y t (s) el tiempo empleado. Por ejemplo, y según las normas de trazado, el rozamiento transversal F_t movilizado en la curva circular para resistir la aceleración centrífuga no compensada por el peralte

$$F_t = \frac{V^2}{127 \cdot R} - \frac{P}{100}$$

no debe superar un cierto límite V_c (km/h) fijado por esas mismas normas.

A partir de una velocidad mayor V_0 (km/h) en la alineación que precede a la curva, es preciso recorrer una distancia D para acoplarse a la velocidad limitada V_c (km/h) en la curva circular. Para ello, es preciso imprimir al vehículo una aceleración longitudinal δ (m/s²) negativa (se trata de una deceleración), que es un parámetro importante: de él dependen tanto sensaciones que experimentan los ocupantes del vehículo como el rozamiento longitudinal movilizado entre las ruedas y el pavimento. Su relación con la velocidad está dada por

$$\delta = \frac{V}{3{,}6^2} \cdot \frac{dV}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{V}{3{,}6}\right)^2$$

Investigaciones modernas han permitido confirmar lo que las experiencias personales de muchos de nosotros habían sugerido: sin que haya detrimento de la seguridad[1], una buena parte de la necesaria disminución de velocidad ΔV

$$\Delta V = V_0 - V_c \geq 0$$

<u>tiene lugar en la curva de transición anterior a la curva circular.</u>

Situando el origen de las distancias s recorridas en el punto donde empieza a disminuir la velocidad V (km/h), se pueden considerar dos enfoques principales:

a) Postular *a priori* una ley que relacione directamente la velocidad con el recorrido, y de ella deducir la deceleración.
b) Postular (también *a priori*) una ley que relacione directamente la deceleración con el recorrido, y de ella deducir la velocidad.

El objeto de este artículo es analizar varios modelos de deceleración o de velocidad.

2. Variación de la velocidad

A continuación se estudian diversas leyes de variación de la velocidad deduciendo, en cada caso, la variación de la aceleración longitudinal en función del recorrido.

a) Lineal:

En este caso, la ley de velocidades es lineal en s:

$$V = V_0 - \frac{s}{D} \cdot \Delta V = V_0 \cdot \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0} \cdot \frac{s}{D}\right)$$

y la aceleración longitudinal es

$$\delta = -\frac{V_0}{3{,}6} \cdot \frac{\Delta V}{3{,}6} \cdot \frac{1 - \frac{\Delta V}{V_0} \cdot \frac{s}{D}}{D}$$

La mínima aceleración (máxima deceleración) se produce en el punto inicial (s = 0):

$$\delta_{mín} = -\frac{\frac{V_0}{3{,}6} \cdot \frac{\Delta V}{3{,}6}}{D}$$

con lo que la aceleración sigue una ley lineal creciente (la deceleración, una decreciente) con el camino recorrido

$$\delta = \delta_{mín} + \frac{\left(\frac{\Delta V}{3{,}6}\right)^2}{D} \cdot \frac{s}{D}$$

hasta llegar a la máxima aceleración (mínima deceleración) para s = D:

$$\delta_{máx} = \delta_{mín} + \frac{\left(\frac{\Delta V}{3{,}6}\right)^2}{D}$$

Para que sea $\delta_{máx} \leq 0$, o sea para que no haya deceleraciones negativas ni para s = D, ha de ser $\Delta V \leq V_0$: o sea, ha de ser $V_c \geq 0$.

b) Cuadrática:

En este caso, la ley de velocidades es de segundo grado en s:

$$V = V_0 - \Delta V \cdot \frac{s}{D} \cdot \left[2 - \frac{s}{D}\right] = V_0 \cdot \left[1 - \frac{\Delta V}{V_0} \cdot \frac{s}{D} \cdot \left(2 - \frac{s}{D}\right)\right]$$

[1] Siempre que se respeten ciertas condiciones.

y la aceleración longitudinal es

$$\delta = -\frac{2\cdot V_0}{3{,}6^2}\cdot\frac{\Delta V}{D}\cdot\left(1-\frac{s}{D}\right)\cdot\left[1-\frac{\Delta V}{V_0}\cdot\frac{s}{D}\cdot\left(2-\frac{s}{D}\right)\right]$$

La mínima aceleración (máxima deceleración) se produce en el punto inicial (s = 0):

$$\delta_{mín} = -\frac{2}{D}\cdot\frac{\Delta V}{3{,}6}\cdot\frac{V_0}{3{,}6}$$

con lo que la aceleración sigue una ley de tercer grado creciente (la deceleración, decreciente) con el camino recorrido s

$$\delta = \delta_{mín} + \frac{2\cdot V_0}{3{,}6^2}\cdot\frac{\Delta V}{D}\cdot\frac{s}{D}\cdot\left[1+\frac{\Delta V}{V_0}\left(1-\frac{s}{D}\right)\cdot\left(2-\frac{s}{D}\right)\right]$$

que se anula al final de la deceleración, para s = D.

Esta ley es monótona. En efecto, si hubiera un punto $s_{mín}$ en el que la aceleración δ alcanzara un mínimo, en él debería ser

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{\frac{d}{ds}\left\{\frac{s}{D}\cdot\left[1+\frac{\Delta V}{V_0}\left(1-\frac{s}{D}\right)\cdot\left(2-\frac{s}{D}\right)\right]\right\}}{\frac{2\cdot V_0}{3{,}6^2}\cdot\frac{\Delta V}{D}} = 0$$

o sea,

$$\frac{V_0}{\Delta V} + 2\cdot\left(1-\frac{s}{D}\right)^2 = \frac{s}{D}\cdot\left(2-\frac{s}{D}\right)$$

cuya menor raíz es

$$\frac{s_{mín}}{D} = 1-\sqrt{1-\frac{2+\frac{V_0}{\Delta V}}{3}}$$

Para que esta ecuación de segundo grado tenga raíces reales ha de ser

$$V_0 \le \Delta V$$

lo cual, evidentemente, no es físicamente posible porque $V_c \ge 0$.

c) Cúbica:

En este caso, la ley de velocidades es de tercer grado con el camino recorrido s:

$$V = V_0\cdot\left[1-\frac{\Delta V}{V_0}\cdot\left(\frac{s}{D}\right)^2\cdot\left(3-2\cdot\frac{s}{D}\right)\right]$$

y la aceleración longitudinal es

$$\delta = -\frac{6}{D}\cdot\frac{V_0}{3{,}6}\cdot\frac{\Delta V}{3{,}6}\cdot\frac{s}{D}\cdot\left(1-\frac{s}{D}\right)\cdot\left[1-\frac{\Delta V}{V_0}\cdot\left(\frac{s}{D}\right)^2\cdot\left(3-2\cdot\frac{s}{D}\right)\right]$$

Inicialmente (s = 0), la aceleración es nula, y luego sigue una ley de quinto grado. Su valor también se anula al final, para s = D.

Esta ley de aceleración presenta un mínimo (máxima deceleración) para $s_{mín}$, que corresponde a la anulación de

$$\frac{d\delta}{ds}$$

o sea, a una raíz de la ecuación de cuarto grado en s

$$\left(1-2\cdot\frac{s}{D}\right)\cdot\left[1-\frac{\Delta V}{V_0}\cdot\left(\frac{s}{D}\right)^2\cdot\left(3-2\cdot\frac{s}{D}\right)\right] = 6\cdot\frac{\Delta V}{V_0}\cdot\left(\frac{s}{D}\right)^2\cdot\left(1-\frac{s}{D}\right)^2$$

o sea

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1}{\left(\frac{s}{D}\right)^2\cdot\left[\left(3-2\cdot\frac{s}{D}\right)+6\cdot\frac{\left(1-\frac{s}{D}\right)^2}{1-2\cdot\frac{s}{D}}\right]}$$

La representación de esta ecuación (Fig. 2-A) indica que si

$$0 \le \frac{\Delta V}{V_0} \le 1$$

$s_{mín}$ /D está comprendida entre 0,30 y 0,50.

La máxima deceleración está comprendida entre (V_0·ΔV/1000) y (V_0·ΔV/1100) m/s^2 (Fig. 2-B)

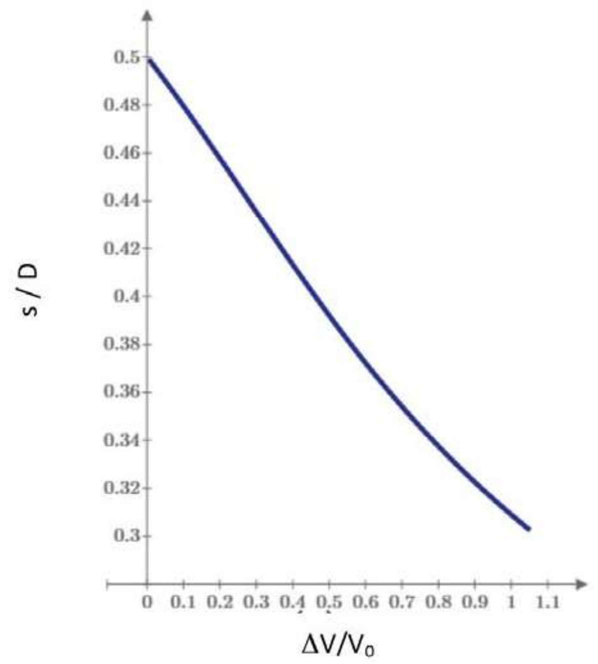


Figura 2A. Situación del punto de deceleración máxima para una ley cúbica de velocidades

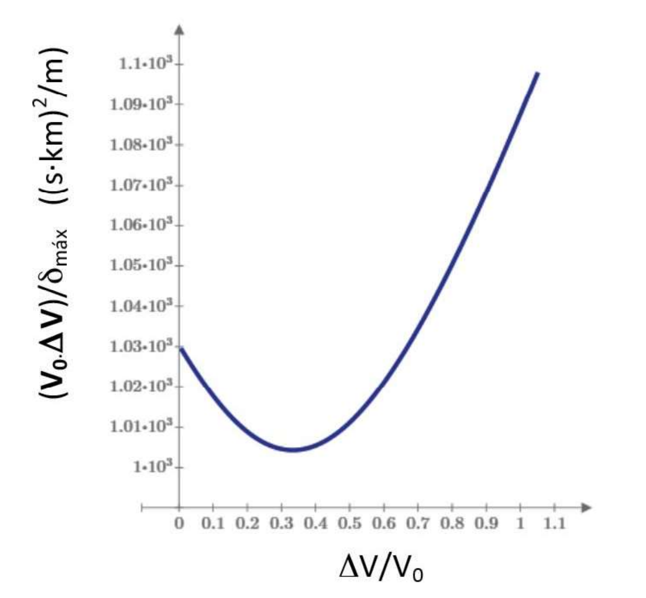


Figura 2B. Variación de la deceleración máxima en una ley cúbica de velocidades para D = 100 m

La representación de las leyes de velocidad (Fig. 2-C) permite obtener algunas conclusiones interesantes:

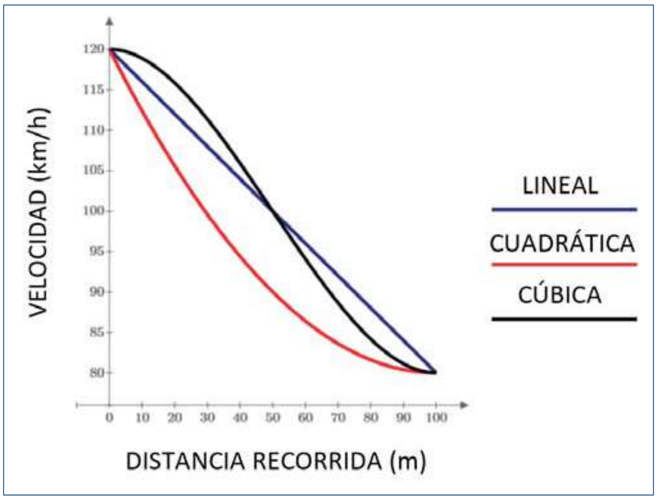


Figura 2C. Variación de la velocidad para distintas leyes V_0 = 120 km/h, ΔV = 40 km/h, D = 100 m

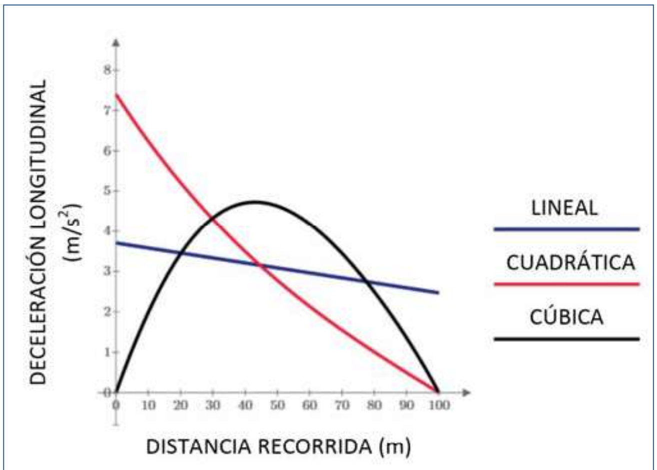


Figura 2D. Variación de la deceleración longitudinal para distintas leyes de velocidad V_0 = 120 km/h, ΔV = 40 km/h, D = 100

- Para la ley cuadrática, la disminución de la velocidad es, al principio, mucho más acentuada que al final.
- Para la ley cúbica, la disminución de la velocidad es más suave tanto al principio como al final; y es más acusada hacia la mitad de D.

Asimismo, la representación de las leyes de deceleración longitudinal (Fig. 2-D) derivadas de esos modelos de variación de la velocidad permite extraer algunas conclusiones adicionales:

- Para la ley lineal de velocidades, la deceleración varía relativamente poco.
- Para la ley cuadrática, la deceleración inicial es elevada, aunque la final es nula.
- Para la ley cúbica, la deceleración es nula tanto al principio como al final, y presenta un máximo para una s comprendida entre el 30 y el 50 % de D, del mismo orden de magnitud que la deceleración media de las otras dos leyes (comprendido entre $V_0 \cdot \Delta V/1000$ y $V_0 \cdot \Delta V/1100$ m/s²).

Lo anterior permite concluir que:

- La ley lineal de disminución de velocidades provoca deceleraciones medias que varían poco, a todo lo largo del recorrido.
- La ley cuadrática no parece conveniente, pues provoca fuertes deceleraciones al principio del recorrido, aunque éstas sean nulas al final.
- La ley cúbica proporciona deceleraciones suaves tanto al principio como al final del recorrido, y presenta una deceleración máxima entre un tercio y la mitad de éste. Esta ley parece más interesante que las anteriores.

3. Variación de la aceleración longitudinal

A continuación, se analizan diversas leyes de variación de la aceleración longitudinal

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\left(\frac{V}{3,6}\right)^2}{ds}$$

a) Aceleración constante:

En este caso,

$$\delta = \delta_0$$

$$\int_{V_0}^{V} d\left[\left(\frac{V}{3,6}\right)^2\right] = 2 \cdot \delta_0 \cdot \int_0^s ds$$

Integrando, se deduce que el cuadrado de la velocidad sigue una ley lineal decreciente con el recorrido:

$$V^2 = V_0^2 \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{\delta_0}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2} \cdot s\right]$$

Al final de la deceleración (s = D),

$$V_c = V_0 - \Delta V = V_0 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{\delta_0}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2} \cdot D}$$

con lo que

$$\delta_0 = -\frac{1-\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2$$

Al ser negativo, se trata de una deceleración. La ley de velocidades queda así (Fig. 3-A):

$$\frac{V}{V_0} = \sqrt{1-\left[1-\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2\right] \cdot \frac{s}{D}}$$

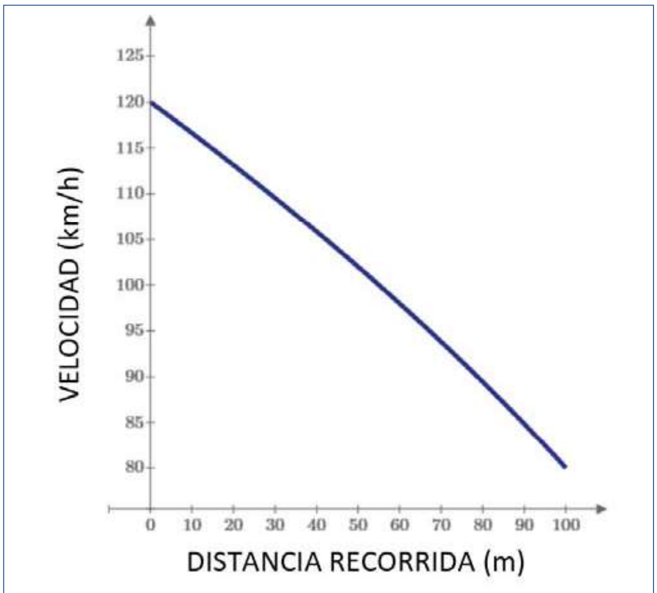


Figura 3A. Variación de la velocidad para una deceleración constante V_0 = 120 km/h, ΔV = 40 km/h, D = 100 m ; δ_0 = -3,09 m/s²

b) Aceleración lineal:

En este caso, la aceleración longitudinal sigue una ley del tipo

$$\delta = \delta_0 + J \cdot s$$

Si $\delta_0 > 0$, inicialmente (s = 0) no habrá una disminución de velocidad, sino un aumento de la misma. Luego δ_0 no puede ser positivo: tiene que haber deceleración desde el principio.

$$\int_{V_0}^{V} d\left[\left(\frac{V}{3,6}\right)^2\right] = 2 \cdot \int_0^s (\delta_0 + J \cdot s) \cdot ds$$

Integrando, se deduce que el cuadrado de la velocidad sigue una ley de segundo grado en s:

$$V^2 = V_0^2 \cdot \left[1 + \frac{2}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2} \cdot s \cdot \left(\delta_0 + \frac{J}{2} \cdot s\right)\right]$$

Al final de la deceleración (s = D),

$$V_c = V_0 - \Delta V = V_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2} \cdot D \cdot \left(\delta_0 + \frac{J}{2} \cdot D\right)}$$

De donde

$$J = -\frac{2}{D} \cdot \left[\delta_0 + \frac{1-\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2\right]$$

Así que, para unas condiciones de contorno V_0, ΔV y D dadas, J es una función lineal de δ_0 y, por lo tanto, hay un conjunto de soluciones compatibles con aquéllas.

La ley de aceleraciones queda así:

$$\delta = \delta_0 - 2 \cdot \left[\delta_0 + \frac{1-\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2\right] \cdot \frac{s}{D}$$

De aquí se sigue que:

- Si

$$\delta_0 = \frac{1-\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2$$

la aceleración será constante, y se estará en el caso a) anterior.

- Si

$$\delta_0 > -\frac{1-\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2 < 0$$

la aceleración crecerá (la deceleración decrecerá) con el recorrido, a partir de una aceleración negativa (deceleración) $\delta_0 < 0$ para s = 0.

Para que la deceleración no se anule para s < D, ha de ser

$$\delta_0 < -\frac{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2}{D} \cdot \left[1-\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2\right]$$

Por lo tanto, el valor absoluto de la deceleración inicial tiene que estar comprendida en el intervalo

$$\frac{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2}{D} \cdot \left[1-\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2\right] > \delta_0 > 0$$

Todas las leyes de deceleración longitudinal lineales se cruzan (Fig. 3-B) para s = D/2.

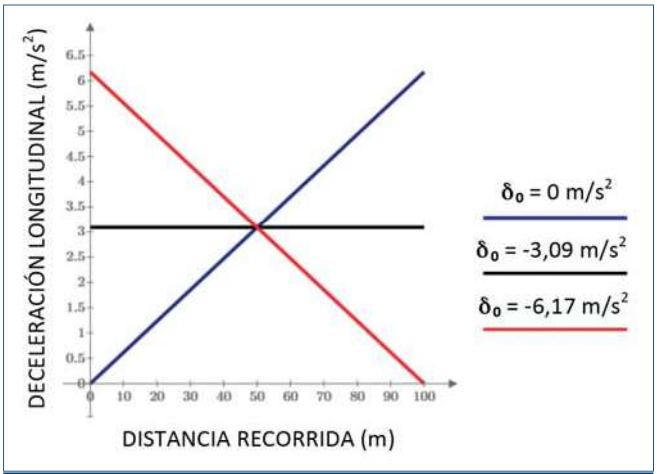


Figura 3B. Variación de la deceleración longitudinal para una ley lineal V_0 = 120 km/h, ΔV = 40 km/h, D = 100 m

La ley definitiva de velocidades (que depende de δ_0) queda así (Fig. 3-C):

$$V = V_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2}\cdot s\cdot\left[\delta_0\cdot\left(1-\frac{s}{D}\right) - \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2\cdot\frac{1-\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2\cdot D}\cdot\frac{s}{D}\right]}$$

c) Aceleración cuadrática simétrica:

En este caso, la aceleración longitudinal sigue una ley del tipo

$$\delta = 4\cdot\delta_{máx}\cdot\frac{s}{D}\cdot\left(1-\frac{s}{D}\right)$$

Tanto inicialmente (s = 0) como al final (s = D), la aceleración longitudinal es nula. Su valor mínimo (máxima deceleración, $\delta_{máx}$) se presenta para s = D/2.

$$\int_{V_0}^{V} d\left[\left(\frac{V}{3,6}\right)^2\right] = 2\cdot\int_0^s 4\cdot\frac{\delta_{máx}}{D}\cdot s\left(1-\frac{s}{D}\right)\cdot ds$$

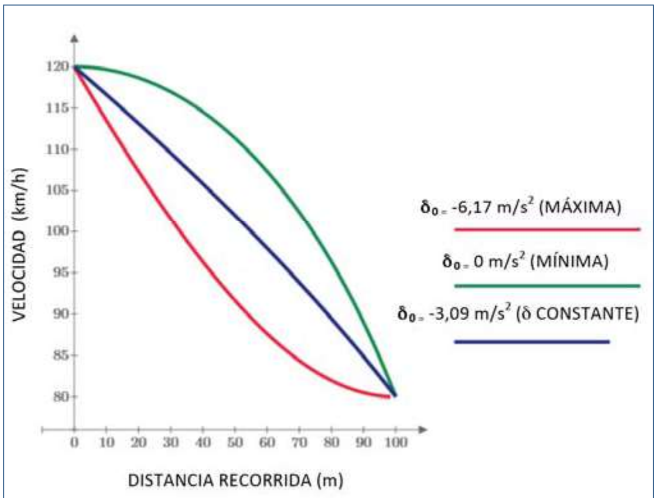


Figura 3C. Variación de la velocidad para una ley lineal de deceleración V_0 = 120 km/h, ΔV = 40 km/h, D = 100 m

Integrando, se deduce que el cuadrado de la velocidad sigue una ley de tercer grado en s:

$$V^2 = V_0^2\cdot\left[1 + \frac{8}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2}\cdot\frac{\delta_{máx}}{D}\cdot s^2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{s}{D}\right)\right]$$

Al final de la deceleración (s = D),

$$V_c = V_0 - \Delta V = V_0\cdot\sqrt{1 + \frac{8}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2}\cdot\delta_{máx}\cdot D\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}$$

De donde

$$\delta_{máx} = -\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{1-\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2\cdot D}\cdot\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2\right]$$

La ley de aceleraciones queda así (Fig. 3-D):

$$\delta = -6\cdot\left[\frac{1-\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2\cdot D}\cdot\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2\right]\cdot\frac{s}{D}\cdot\left(1-\frac{s}{D}\right)$$

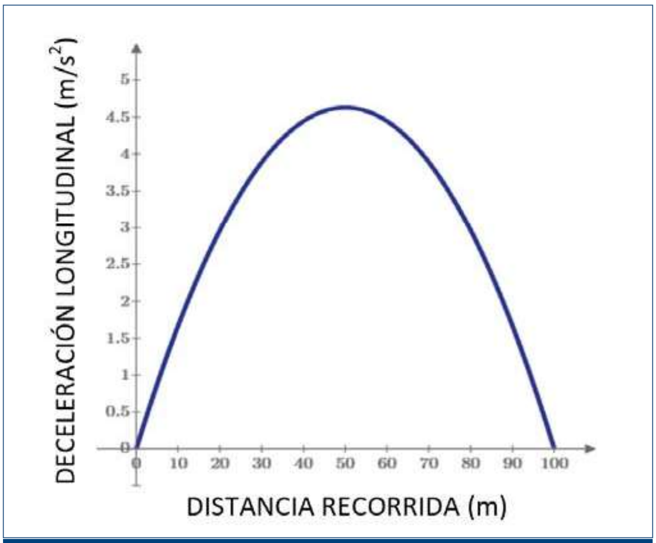


Figura 3D. Variación de la deceleración longitudinal para una ley cuadrática simétrica V_0 = 120 km/h, ΔV = 40 km/h, D = 100 m

La ley de velocidades queda así (Fig. 3-E):

$$V = V_0\cdot\sqrt{1-6\cdot\left[1-\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{s}{D}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{s}{D}\right)}$$

d) Aceleración cuadrática asimétrica:

En este caso, la aceleración longitudinal sigue una ley del tipo

$$\delta = \delta_0 + J \cdot \frac{s}{D} \cdot \left[2 - \frac{s}{D}\right]$$

Si $\delta_0 > 0$, inicialmente ($s = 0$) no habrá una disminución de velocidad, sino un aumento de la misma. Luego δ_0 no puede ser positivo: tiene que haber deceleración desde el principio.

$$\int_{V_0}^{V} d\left[\left(\frac{V}{3,6}\right)^2\right] = 2 \cdot \int_0^s \left(\delta_0 + J \cdot \frac{s}{D} \cdot \left[2 - \frac{s}{D}\right]\right) \cdot ds$$

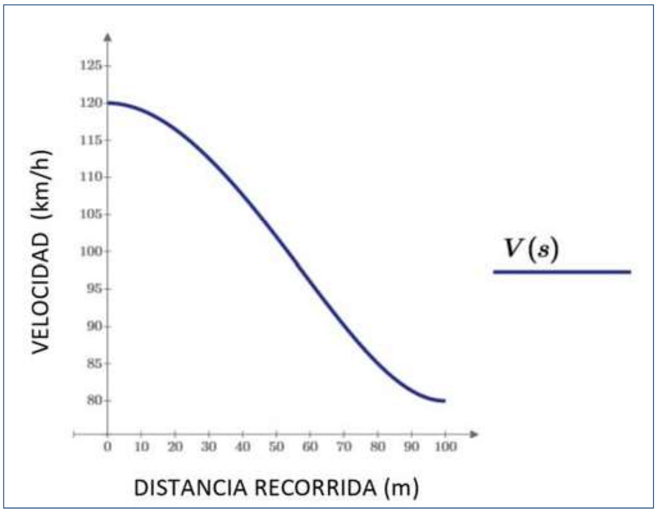


Figura 3E. Variación de la velocidad para una ley de deceleración cuadrática simétrica V_0 = 120 km/h, ΔV = 40 km/h, D = 100 m

Integrando,

$$V^2 = V_0^2 \cdot \left[1 + \frac{2}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2} \cdot s \cdot \left[\delta_0 + J \cdot \frac{s}{D} - \frac{J}{3} \cdot \left(\frac{s}{D}\right)^2\right]\right]$$

se deduce que el cuadrado de la velocidad sigue una ley de tercer grado en s:

$$V = V_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2} \cdot s \cdot \left[\delta_0 + J \cdot \frac{s}{D} \cdot \left(1 - \frac{\frac{s}{D}}{3}\right)\right]}$$

Al final de la deceleración ($s = D$),

$$V_c = V_0 - \Delta V = V_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2} \cdot D \cdot \left(\delta_0 + \frac{2}{3} \cdot J\right)}$$

De donde

$$J = -\frac{3}{2} \cdot \left[\delta_0 + \frac{1 - \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2\right]$$

Así que, para unas condiciones de contorno V_0, ΔV y D dadas, J es una función lineal de δ_0 y, por lo tanto, hay un conjunto de soluciones compatibles con aquéllas.

La ley de aceleraciones queda así:

$$\delta = \delta_0 - \frac{3}{2} \cdot \left[\delta_0 + \frac{1 - \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2\right] \cdot \frac{s}{D} \cdot \left(2 - \frac{s}{D}\right)$$

De aquí se sigue que:

- Si

$$\delta_0 = -\frac{1 - \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2$$

la aceleración será constante, y se estará en el caso a) anterior.

- Si

$$\delta_0 > -\frac{1 - \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2 < 0$$

la aceleración crecerá (la deceleración decrecerá) con el recorrido, a partir de una aceleración negativa (deceleración) $\delta_0 < 0$ para $s = 0$.

Para que la deceleración no se anule para $s < D$, ha de ser

$$\delta_0 > -3 \cdot \frac{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2}{D} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^2\right]$$

Por lo tanto, el valor absoluto de la deceleración inicial tiene que estar comprendida en el intervalo

$$3 \cdot \frac{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2}{D} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^2\right] > \delta_0 > 0$$

Todas las leyes de deceleración longitudinal cuadráticas se cruzan (Fig. 3-F) para

$$\frac{s}{D} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0,4226$$

La ley definitiva de velocidades (que depende de δ0) queda así (Fig. 3-G):

$$V = V_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot D}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2} \cdot \frac{s}{D} \cdot \left\{\delta_0 \cdot \left[1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{D} \cdot \left(1 - \frac{\frac{s}{D}}{3}\right)\right] - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2 \cdot \frac{1 - \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \frac{s}{D} \cdot \left(1 - \frac{\frac{s}{D}}{3}\right)\right\}}$$

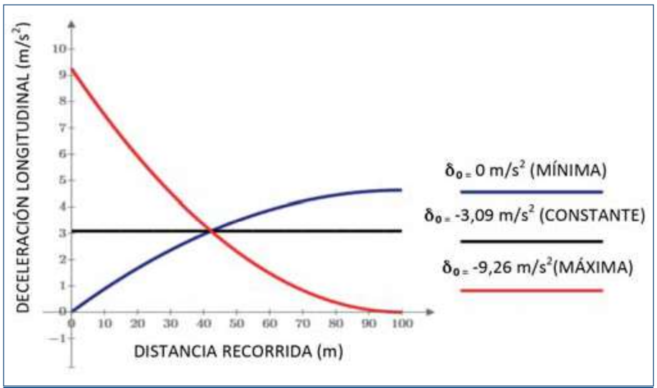


Figura 3F. Variación de la deceleración longitudinal para una ley cuadrática asimétrica V_0 = 120 km/h, ΔV = 40 km/h, D = 100 m

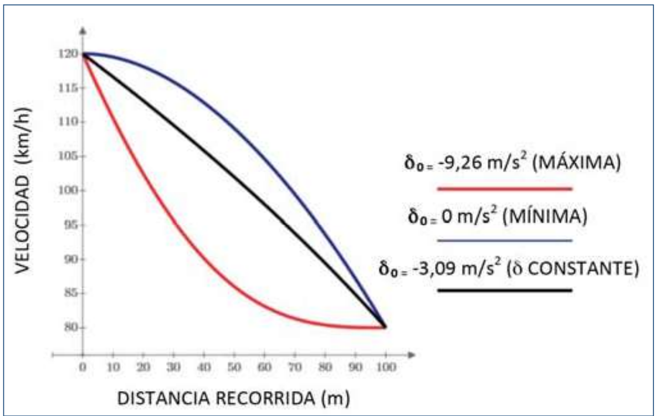


Figura 3G. Variación de la velocidad para una ley de deceleración longitudinal cuadrática asimétrica V_0 = 120 km/h, ΔV = 40 km/h, D = 100 m

e) Cúbica:

En este caso, la ley de aceleraciones longitudinales es de tercer grado en s

$$\delta = \delta_0 + \left[J \cdot \left(\frac{s}{D}\right)^2 \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{s}{D}\right)\right]$$

Si $\delta_0 > 0$, inicialmente (s = 0) no habrá una disminución de velocidad, sino un aumento de la misma. Luego δ_0 no puede ser positivo: tiene que haber deceleración desde el principio.

$$\int_{V_0}^{V} d\left[\left(\frac{V}{3,6}\right)^2\right] = 2 \cdot \int_0^s \left(\delta_0 + J \cdot \left[\frac{s}{D}\right]^2 \cdot \left[3 - 2 \cdot \frac{s}{D}\right]\right) \cdot ds$$

Integrando,

$$V^2 = V_0^2 \cdot \left[1 + \frac{2}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2} \cdot s \cdot \left[\delta_0 + J \cdot \left(\frac{s}{D}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\frac{s}{D}}{2}\right)\right]\right]$$

se deduce que el cuadrado de la velocidad sigue una ley de cuarto grado en s:

$$V = V_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot D}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2} \cdot \frac{s}{D} \cdot \left[\delta_0 + J \cdot \left(\frac{s}{D}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\frac{s}{D}}{2}\right)\right]}$$

Al final de la deceleración (s = D),

$$V_c = V_0 - \Delta V = V_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2} \cdot D \cdot \left(\delta_0 - \frac{J}{2}\right)}$$

De donde

$$J = -2 \cdot \left[\delta_0 + \frac{1 - \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2\right]$$

Así que, para unas condiciones de contorno V_0, ΔV y D dadas, J es una función lineal de δ_0 y, por lo tanto, hay un conjunto de soluciones compatibles con aquéllas.

La ley de aceleraciones queda así:

$$\delta = \delta_0 - 2 \cdot \left[\delta_0 + \frac{1 - \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{s}{D}\right)^2 \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{s}{D}\right)$$

De aquí se sigue que:

- Si

$$\delta_0 = -\frac{1 - \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2$$

la aceleración será constante, y se estará en el caso a) anterior.

- Si

$$\delta_0 > -\frac{1 - \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2 < 0$$

la aceleración crecerá (la deceleración decrecerá) con el recorrido, a partir de una aceleración negativa (o sea, una deceleración) $\delta_0 < 0$ para s = 0.

Para que la deceleración no se anule para s < D, ha de ser

$$\delta_0 > -2 \cdot \frac{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^2\right]$$

- Si

$$\delta_0 < -\frac{1 - \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2 \cdot D} \cdot \left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2$$

la aceleración será decreciente (la deceleración será creciente con el recorrido), y será mínima (máxima) para s = D.

Por lo tanto, el valor absoluto de la deceleración inicial tiene que estar comprendida en el intervalo

$$-2\cdot\frac{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2}{2\cdot D}\cdot\left[1-\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2\right]<\delta_0<0$$

Todas las leyes de deceleración longitudinal cúbicas se cruzan (Fig. 3-H) para s = D/2.

La ley definitiva de velocidades (que depende de δ0) queda así (Fig. 3-I):

$$V=V_0\cdot\sqrt{1+\frac{2\cdot D}{\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2}\cdot\frac{s}{D}\cdot\left\{\delta_0-2\cdot\left[\delta_0+\frac{1-\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}{2\cdot D}\cdot\left(\frac{V_0}{3,6}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{s}{D}\right)^2\cdot\left(2-3\cdot\frac{s}{D}\right)\right\}}$$

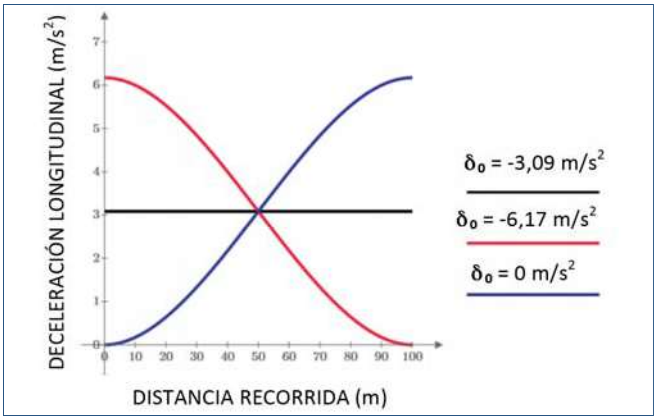


Figura 3H. Variación de la deceleración longitudinal para una ley cúbica V_0 = 120 km/h, ΔV = 40 km/h, D = 100 m

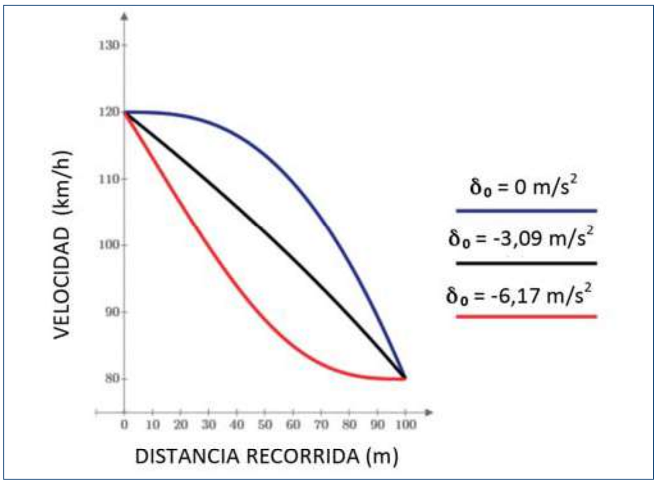


Figura 3I. Variación de la velocidad para una ley cúbica de deceleración longitudinal V_0 = 120 km/h, ΔV = 40 km/h, D = 100 m

La representación de las leyes de deceleración longitudinal (Fig. 3-J) permite obtener algunas conclusiones interesantes:

- Sólo las leyes de deceleración constante y cuadrática simétrica presentan una solución única; las demás (lineal, cuadrática asimétrica, cúbica) permiten una gama de soluciones en función de la deceleración inicial δ_0, desde un valor nulo hasta otro máximo.

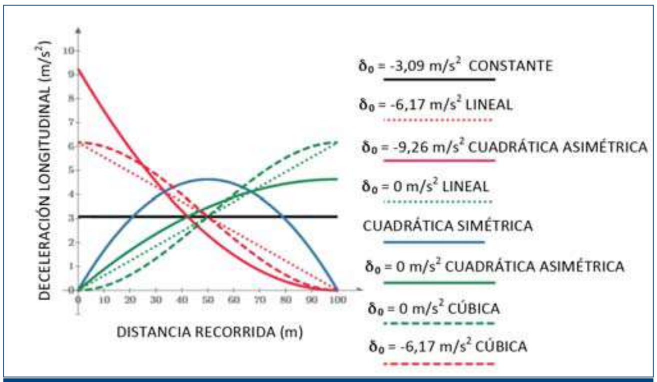


Figura 3J. Variación de la deceleración longitudinal para distintas leyes V_0 = 120 km/h, ΔV = 40 km/h, D = 100 m

- Todas las leyes son monótonas, excepto la cuadrática simétrica.
- Para δ_0 = 0, las leyes lineal, cuadrática asimétrica y cúbica no presentan diferencias relevantes.
- Para elevadas deceleraciones iniciales, tampoco presentan diferencias relevantes las leyes lineal y cúbica; pero la ley cuadrática asimétrica provoca una elevada deceleración inicial.

La representación de las leyes de velocidades correspondientes a los distintos modelos de deceleración (Fig. 3-J) permite obtener algunas conclusiones interesantes:

- Sólo los modelos de deceleración constante y cuadrática simétrica presentan una solución unívoca; los demás presentan una gama de soluciones entre una deceleración inicial nula y otra máxima. Los primeros proporcionan leyes parecidas para la disminución de la velocidad; parece interesante el modelo cuadrático simétrico.
- Tanto para deceleraciones iniciales bajas como altas, las leyes de deceleración lineal, cuadrática asimétrica y cúbica no difieren mucho entre sí.
- Para una deceleración inicial baja la disminución de la velocidad es, al final, mucho más acusada para el modelo de deceleraciones cúbico.
- Para una deceleración inicial alta la disminución de la velocidad es, al principio, mucho más acusada para el modelo de deceleraciones cuadrático asimétrico. ❖

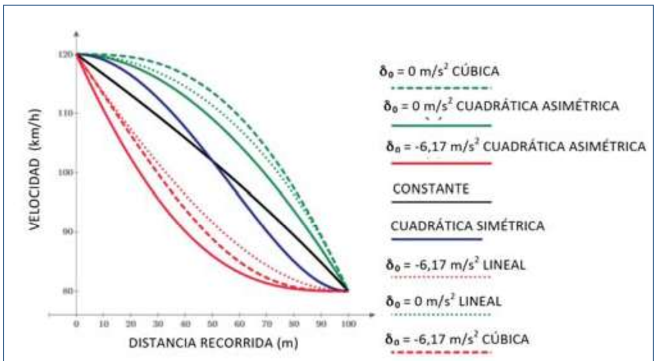


Figura 3K. Variación de la velocidad para distintas leyes de deceleración longitudinal V_0 = 120 km/h, ΔV = 40 km/h, D = 100 m