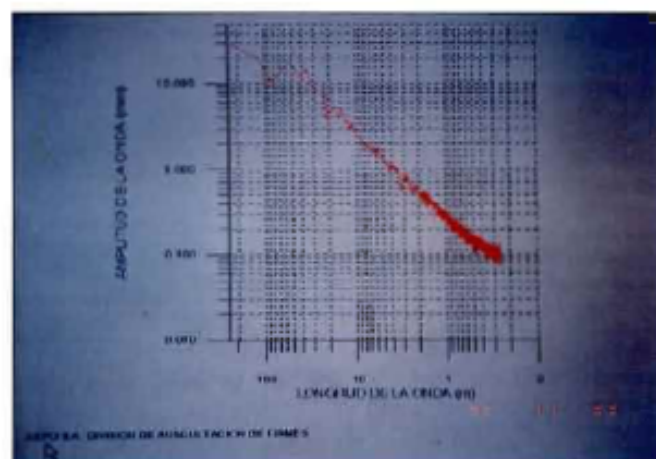


Texturas y regularidad de un pavimento. Cálculo de las longitudes de onda más importantes en la regularidad superficial de una carretera.

Por **Manuel J. Melis**
Dr. Ing. de Caminos, M. Sc, MBA
AEPO S.A. Ingenieros Consultores

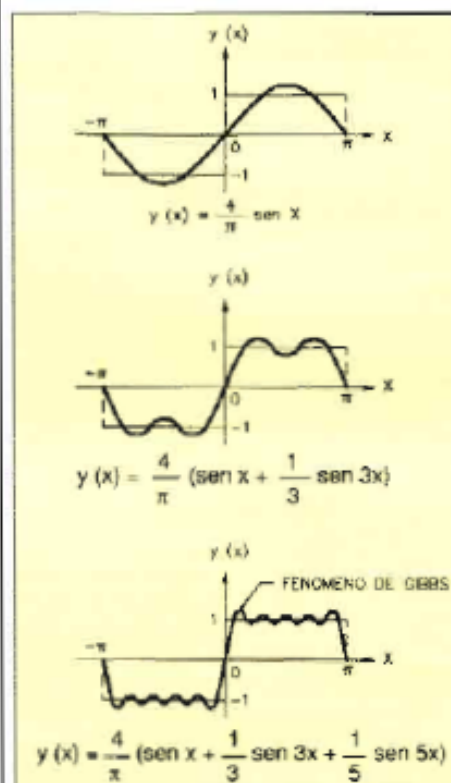


Tramo de la Autovía N-II y su "espectro de densidad de energía". El presente artículo intenta explicar lo que realmente significa esta curva, cómo se calcula y para qué sirve en la práctica al Ingeniero de Firms.

Generalidades y resumen

LA forma actual más habitual y científica de analizar el pavimento de una carretera en cuanto se refiere a texturas y regularidad superficial consiste en tomar su perfil longitudinal con intervalos muy pequeños (del orden de micras o milímetros) y, utilizando la Transformada Discreta de Fourier (TDF), descomponerlo en sus sinusoides componentes. Es bien conocido el hecho de que cualquier función, que cumpla unas determinadas condiciones que se resumen más adelante, puede aproximarse por una suma de funciones sinusoidales como se esquematiza en la figura 1, en la que se aproxima en serie de senos una función pulso rectangular. El lector puede imaginar con facilidad que el perfil longitudinal de una carretera en un tramo determinado puede aproximarse también, con la exactitud que se desee, por una suma de curvas senos y cosenos de

amplitudes variables y longitudes de onda variables. Las longitudes de onda de las sinusoides componentes de un tramo de carretera va-



riarán desde 0 hasta la longitud del tramo estudiado, y la amplitud correspondiente a cada longitud de onda será mayor o menor dependiendo de los defectos de la carretera. La figura 2. (ver página siguiente), resume los intervalos de longitudes de onda más importantes en una carrera y cómo afectan sus amplitudes a la calidad de la misma.

En la práctica el perfil longitudinal de la carretera se obtiene a intervalos variables desde 12,5 cm hasta 30 cm o medio metro. El número de sinusoides componentes de un tramo de carretera que pueden obtenerse es la mitad del número de puntos obtenidos en el perfil longitudinal, lo que se deta-

Figura 1. Ajuste de una función rectangular por serie de senos. Obsérvese que pudiera interpretarse en el sentido de que al ir disminuyendo las longitudes de las ondas componentes va disminuyendo su amplitud, para ir ajustando las esquinas y los saltos de la función original. Lo mismo pasa al reproducir el perfil longitudinal de una carretera. Ver figuras 5 a 9.

lla a continuación en el presente artículo. El objetivo del Ingeniero de firmes es conocer las amplitudes de las sinusoides correspondientes a cada longitud de onda, de forma que pueda saberse el estado del firme y seleccionar la estrategia de reparación o mantenimiento más adecuada. Conocer las amplitudes y la longitud de onda de los defectos puede ayudar también a corregir sus causas (mal extendido, ritmo deficiente en los camiones de alimentación de la extendedoras, mala compactación, mala calidad del hormigón, deficiente colocación de los pasadores, etc.) en trabajos posteriores. Las longitudes de onda componentes del perfil suelen agruparse para su más fácil análisis en diferentes intervalos, que se resumen en el cuadro 1.

a) Las sinusoides componentes con longitudes de onda de decenas o centenares de metros son realmente elementos de trazado, la pendiente longitudinal, tal vez las parábolas de acuerdos verticales o badenes muy largos, y no molestan en general al conductor en lo que respecta a regularidad superficial.

b) Las longitudes de onda del orden de varios metros hasta medio metro caracterizan la regularidad superficial de un pavimento, y desde 1986 se evalúan por medio del conocido modelo matemático llamado IRI. El conductor las nota sufriendo un desagradable efecto de bote y traqueteo en el asiento al conducir.

c) Las longitudes de onda de 0,5 metros hasta 5 cm se asocian a la llamada "Megatextura". El conductor las nota como baches o descarnaduras en las carreteras viejas y no serán medidas por el IRI si el equipo que mide el IRI filtra el

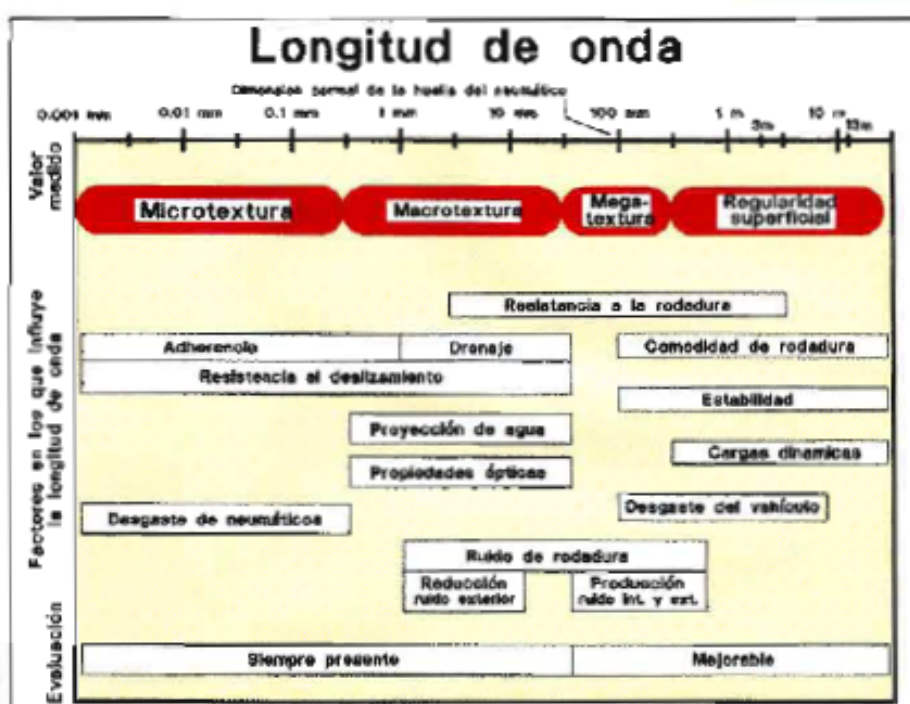


Figura 2. Longitudes de onda y parámetros en los que influyen.

perfil y toma sólo las longitudes de onda mayores de 0,5 m. En (1) puede verse que la influencia en el IRI de las longitudes de onda menores es más pequeña, de forma que puede decirse que una megatextura grande no afecta de forma muy importante a la regularidad superficial. Influye sin embargo, como las longitudes de onda anteriores, en el desgaste de los vehículos, en el confort de la conducción y en el agarre del vehículo a la calzada.

d) Las longitudes de onda menores de 5 cm se asocian a las llamadas "Macrotextura" y "Microtextura". La Macrotextura suele definirse como la banda de longitudes de onda comprendidas entre 5 cm y 0,5 mm. Como es una banda muy amplia, algunos equipos como el Video Láser RST suelen dividirla en dos segmentos: Ma-

crotextura gruesa (de 1 a 5 cm) y Macrotextura fina (de 0,5 mm a 1 cm de longitud de onda). Afecta a la capacidad de drenaje del pavimento, al desgaste de los neumáticos, a las salpicaduras y proyecciones de agua durante la conducción y a las propiedades ópticas del pavimento. En un huso granulométrico denso de rodadura, el porcentaje en peso de partículas con tamaños comprendidos entre 0,63 mm y 1 cm suponen como media desde un 74% (huso D8) a un 44% (huso D20) del total, aunque pueden llegar hasta el 82% (D8) y el 57% (D20). En los husos semidensos el porcentaje varía desde un 59% (huso S12) respectivamente. Observe el lector que en la banda de longitudes de onda de 1 mm a 1 cm se están analizando irregularidades del orden de magnitud de los áridos de la capa de rodadura. Por lo tanto, si la adherencia neumático-pavimento está relacionada con el tamaño de los mismos, parece evidente al autor que la macrotextura fina está muy relacionada con la adherencia del neumático al pavimento. Cuanto mayor sea la amplitud de las sinusoides en esa banda de longitudes de onda (es decir, la RMS de dicha banda), mejor será la adherencia.

La Microtextura suele definirse como la banda de longitudes de onda inferiores a 0,5 mm. Como se

Parámetro	Long. de onda	La amplitud debe ser
Ondas Largas	13 m - 40 m	Muy baja o nula
Ondas Medias	3 m - 13 m	Muy baja o nula
Ondas Cortas	1 m - 3 m	Muy baja o nula
Ondas muy cortas	50 cm - 1 m	Muy baja o nula
Megatextura	5 cm - 50 cm	Muy baja o nula
Macrotextura gruesa	1 cm - 5 cm	Alta, para la adherencia
Macrotextura fina	0,5 mm - 1 cm	Alta (adherencia)
Microtextura	< 0,5 mm	Alta (adherencia)

“El análisis de Fourier es un tema profundo. La matemática subyacente en la TDF en particular es muy grande, y el autor no quisiera confundir al amable lector dando ninguna impresión de simplismo o trivialidad.”

ha dicho, la macro fina y la micro-textura están asociadas a la adherencia neumático-pavimento y al deslizamiento, de forma que son variables de extraordinaria importancia para el Ingeniero de Carreteras, tanto en Proyecto como en Construcción como en Conservación. En el momento de escribir estas líneas (Octubre 1992) se está llevando a cabo un Experimento Internacional sobre medición de textura (en Bélgica y España, en Alicante y Murcia) del que sin duda se obtendrán las bases de un parámetro equivalente al IRI que permita obtener un indicador de adherencia a partir de las medidas de textura con aparatos de alto rendimiento. Aunque actualmente algunos puristas teóricos todavía rechazan que de la macro fina pueda deducirse la adherencia y argumentan que sólo puede medirse a partir del análisis de una banda de longitudes de onda menores (micro-textura), los ingenieros de a pie creemos que es necesario esperar a los resultados de este Experimento Internacional de Textura, y estamos convencidos de que se obtendrá una correlación entre la RMS de la banda 1 mm - 10 mm con las medidas de adherencia del Skidometer BV 11 o del SCRIM.

El IRI se mide en dm/hin (o en mm/m, o en pulgadas por milla en USA) y sólo es un modelo matemático que se pasa sobre el perfil, cubriendo en la práctica las longitudes de onda comprendidas entre 0,5 m y 50 m. Las ondas y las texturas sin embargo son magnitudes reales y características del perfil de la carretera. La macro-textura fina



En la foto se aprecia la fase de extendido, la cual es muy importante para el resultado final de la carretera, y de su regularidad superficial.

por ejemplo (e igualmente el resto de las variables) debe medirse con algún parámetro que caracterice las amplitudes de las sinusoides componentes del perfil de la carretera cuyas longitudes de onda están comprendidas entre 0,5 mm y 1 cm. El Video Láser RST (y otros equipos como el RODECO o el ORCA) miden la media de estas amplitudes, pero no la media aritmética simple para evitar las amplitudes negativas que aparecerían con sinusoides desfasadas, sino con la media cuadrática, que es la raíz cuadrada de la media de la suma de los cuadrados de las amplitudes, y que suele denominarse RMS (del inglés root-mean-square). El número de sinusoides que aparecen en cada banda de longitudes de onda depende, como se verá a continuación, del número de puntos que se han tomado del perfil de la carretera y en base a los cuales se obtiene la Transformada Discreta de Fourier del perfil.

Esta TDF es la base de todos los análisis mencionados más arriba, y puede decirse que actualmente todavía es la base de la Auscultación de Carreteras con equipos de alto rendimiento.

El presente artículo detalla una sencilla rutina en C para la obtención de las sinusoides componentes del perfil longitudinal de una

carretera, explicando las ventajas y desventajas de esa rutina con las conocidas rutinas de Transformada Rápida de Fourier (FFT) que incluyen los paquetes estadísticos habituales. Trata también de aclarar algunos conceptos utilizados a veces sin la adecuada explicación, como la "densidad espectral de energía" de un perfil de una carretera. El autor cree que la utilización de este concepto no es muy afortunada, y que en bastantes casos probablemente se utilizan las salidas de una rutina cerrada de la FFT y no se sabe con exactitud de qué se está hablando, pudiendo verse en la literatura "espectros de energía de carreteras" en los que las ordenadas son unas veces "unidades arbitrarias", otras " $\text{ft}^2/\text{c}/\text{ft}$ ", otras " $\text{m}^2/\text{c}/\text{m}$ ", otras "decibelios" o "autoespectro" y muchas más distintas sumamente variadas. La aportación fundamental que se pretende con la rutina que aquí se describe consiste en dar las amplitudes de las curvas senos y cosenos componentes, en las mismas unidades en que se miden las cotas del perfil longitudinal, y en dar además la amplitud y la fase de cada sinusoides equivalente, es decir, que no sólo se da el espectro de amplitudes sino también el espectro de fases. La representación puede hacerse directamente de la amplitud frente

a la longitud de onda, o de la amplitud al cuadrado, pero se sabe exactamente lo que es en cada caso. El programa está escrito en C, y está a disposición de los lectores interesados.

1. Antecedentes. El desarrollo en Serie de Fourier.

La teoría y obtención del desarrollo en serie continua de Fourier, de la descomposición discreta, de la transformada continua de Fourier y de la transformada discreta de Fourier puede verse en la literatura técnica (2), (3), (4), (5), (11), por lo que sólo se resume aquí lo esencial para el desarrollo del programa de cálculo. El análisis de Fourier es un tema profundo. La matemática subyacente en la TDF en particular es muy grande, y el autor no quisiera confundir al amable lector dando ninguna impresión de simplismo o trivialidad. El lector interesado puede estudiar los temas en profundidad en la bibliografía, pero intenta aquí el autor explicar en un lenguaje sencillo una aplicación, también sencilla, de la TDF a la Ingeniería de Firmes.

Es bien conocido que el desarrollo en serie de Fourier de una función periódica cualquiera $y = f(x)$ definida en el intervalo $[-L/2, L/2]$ y de período L , es decir, una función en la que se cumple que $f(x) = f(x+L)$, viene dado por la expresión:

[Ec. 1]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right)$$

donde los coeficientes a_n y b_n vienen dados por las expresiones

[Ec. 1a]

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{L} dx$$

[Ec. 1b]

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{L} dx$$

Esto quiere decir simplemente que en el intervalo $[-L/2, L/2]$ la función $f(x)$ puede representarse como suma de una serie de senos y otra serie de cosenos, cuyas amplitudes vienen dadas por la Ec. 1. La figura 1 es un ejemplo (sencillo y clásico que puede encontrarse en la literatura) de cómo la suma de senos va aproximando la función deseada conforme van calculándose más términos de la serie. Si la serie de senos tuviera muchos términos aproximaría muy exactamente a la función original, salvo en las discontinuidades como la de la Fig. 1, en que la teoría dice que al truncar la serie hay siempre un desajuste llamado Fenómeno de Gibbs (aunque hoy, con los baratísimos y potentísimos ordenadores de que disponemos en nuestra propia casa en nuestra mesa de trabajo puede comprobarse que a partir de 5 000 ó 10 000 términos este desajuste no se aprecia en absoluto. Recordemos que Gibbs murió en 1903). Se sabe que las funciones pares [$f(x) = f(-x)$] resultan en serie de sólo cosenos, mientras que las funciones impares [$f(x) = -f(-x)$] resultan en serie de sólo senos, como el caso de la Fig. 1. Para que el desarrollo en serie de Fourier sea válido, la función $f(x)$ debe satisfacer las condiciones de Dirichlet, es decir, estar definida y ser unívoca en el intervalo estudiado, y ser continua o tener un número finito de discontinuidades finitas en el intervalo de periodicidad.

Se ha dicho que intuitivamente puede imaginarse el perfil de una carretera como una suma de senos

“No deben presentarse informes sobre autovías con gráficos de ‘densidad espectral de energía’ medidos en decibelios sin explicar su obtención y significado con todo detalle.”



Otra instantánea de extendido en

y cosenos de distintas amplitudes y todos en fase, pero también puede imaginarse, y tal vez es aún más intuitivo, como sólo una serie de senos de distintas amplitudes A_n , desfasados cada uno de ellos un ángulo ϕ_n . En cualquier texto sobre el tema puede verse que la expresión anterior sumatoria de senos y cosenos puede ponerse en la forma de la Ecuación 2.

[Ec. 2]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} + \phi_n \right)$$

donde

[Ec. 2a]

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2};$$

[Ec. 2b]

$$\phi_n = \arctg \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$$

Este desarrollo en serie permite calcular las amplitudes A_n que corresponden a las sinusoides de distintas longitudes de onda. Como se sabe, cada longitud de onda corresponde a una frecuencia (longitudes de onda cortas corresponden a frecuencias grandes y longitudes de onda largas corresponden a fre-



a autovía ya finalizada, del Plan General de Carreteras.

cuencias pequeñas). Se suele decir que el desarrollo de Fourier transforma una función de longitudes en otra función de frecuencias, asociando a la serie de cotas correspondientes a cada abscisa una serie de amplitudes correspondientes a cada longitud de onda.

En forma compleja, y recordando que

[Ec. 3]

$$e^{i \frac{n\pi x}{L}} = \cos \frac{n\pi x}{L} + i \sin \frac{n\pi x}{L}$$

la expresión puede ponerse en la forma:

[Ec. 4]

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}$$

donde los coeficientes A_n , es decir, las amplitudes de las sinusoides componentes, vienen dados por:

[Ec. 4a]

$$A_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx$$

El desarrollo en serie de Fourier fue inventado y desarrollado por Juan Bautista Fourier en 1807, y desde entonces hasta hace pocos años (en que ha comenzado a desarrollarse la Transformada de Wave-

let) ha sido el método de proceso y análisis de señales analógicas y digitales utilizado por casi todas las ramas de la ciencia y la ingeniería.

Una importantísima propiedad de este desarrollo es la llamada "Relación o Teorema de Parseval", que relaciona la media cuadrática de los valores de la función $f(x)$ con las amplitudes a_n y b_n de los senos y cosenos componentes. El teorema viene expresado por la igualdad:

[Ec. 5]

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

2. La Transformada Discreta de Fourier.

En los casos reales de ingeniería, como en el caso que nos ocupa de una carretera, no se conoce la expresión analítica de la función, sino que sólo se conoce su valor en una serie discreta de puntos. En el caso del perfil longitudinal de una carretera, el perfil se toma a distancias iguales, normalmente 12,5, 25 ó 30 cm, y esta serie de valores igualmente espaciados es toda la información de que se dispone sobre el perfil real. No se trata aquí del funcionamiento interno de los equipos de auscultación de alto rendimiento, que pueden trabajar como se sabe con intervalos del orden de micras, sino de los valores que el Ingeniero responsable de una carretera puede manejar, bien sea obteniendo su perfil con el DIPSTICK (25 ó 30 cm) o con el RST (12,5 cm). El problema es descomponer esta serie de valores en las curvas seno y coseno componentes, cada una con su correspondiente amplitud. Los datos de que se dispone son el número N de muestras tomadas (es decir, el número de puntos del perfil longitudinal), la distancia de muestreo Δx (distancia entre puntos del perfil) y la serie de N cotas correspondiente.

Básicamente, el principio de la descomposición discreta de Fourier de esta serie de puntos se basa en la aproximación de la integral de la ecuación 4a por una sumatoria, aunque decir esto pueda molestar a algún matemático puro. Si

al tomar el perfil longitudinal se ha obtenido una sucesión o muestra de N cotas tomadas a intervalos iguales (equiespaciadas) $\{h_n\}$ $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, tomando:

[Ec. 6a]

$$Q = \frac{N-1}{2} \quad (N \text{ impar})$$

[Ec. 6b]

$$Q = \frac{N}{2} \quad (N \text{ par})$$

se dice que la Transformada Discreta de Fourier de $\{h_n\}$ es la sucesión bidimensional:

[Ec. 7a]

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_n \cos \frac{2\pi}{N} kn$$

[Ec. 7b]

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_n \sin \frac{2\pi}{N} kn$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, Q$$

La TDF permite expresar el Perfil Longitudinal de la carretera, es decir, la sucesión observada de cotas, como una suma de curvas senos y cosenos de frecuencias:

[Ec. 8]

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k \quad k = 0, 1, 2, \dots, Q$$

donde las respectivas amplitudes de los senos y cosenos son los pares (a_k, b_k) . Las cotas resultan ser:

[Ec. 9a]

$$h_n = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^Q (a_k \cos \frac{2\pi}{N} kn + b_k \sin \frac{2\pi}{N} kn)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ y N impar, o también:

[Ec. 9b]

$$\bar{h}_n - \bar{h} = \sum_{k=1}^Q (a_k \cos \frac{2\pi}{N} kn + b_k \sin \frac{2\pi}{N} kn)$$

donde $\bar{h}$ es la media de las cotas. Las expresiones anteriores son válidas para N impar. Para N par se modifican ligeramente:

[Ec. 10a]

$$h_n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{Q-1} (a_k \cos \frac{2\pi}{N} kn + b_k \sin \frac{2\pi}{N} kn) + \frac{1}{2}a_Q \cos \pi n$$

$n = 0, 1, 2, \dots, (N-1); N \text{ par};$
o también:

[Ec. 10b]

$$h_n = \bar{h} + \sum_{k=1}^{Q-1} (a_k \cos \frac{2\pi}{N} kn + b_k \sin \frac{2\pi}{N} kn) + \frac{1}{2}a_Q \cos \pi n$$

Obsérvese que para $k = 0$ la frecuencia asociada es cero. Para esta frecuencia a_0 es el doble de la media de las cotas, $\bar{h}$.

[Ec. 11]

$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_n = 2\bar{h} \quad b_0 = 0$$

Obsérvese también que b_0 es

cero en todos los casos y que b_Q es cero si N es par.

Si N es impar, la TDF devuelve el elemento a_0 y $(N-1)/2$ pares (a_k, b_k) para $k = 1, 2, \dots, (N-1)/2$. Si N es par, la TDF devuelve el elemento a_0 , el $a_{Q/2}$ y $(N/2)-1$ pares (a_k, b_k) para $k = 1, 2, \dots, (N/2)-1$. En resumen, la TDF devuelve en todos los casos N valores del dominio de la frecuencia ($N/2$ senos y $N/2$ cosenos).

Obsérvese que cada par (a_k, b_k) está asociado a una frecuencia $2\pi/N$. Para $k = 1$ la frecuencia asociada $2\pi/N$ se denomina frecuencia fundamental, y queda determinada por el número N de cotas. Todas las frecuencias superiores se denominan armónicos (múltiplos) de la fundamental. De la misma forma la longitud de onda fundamental es $N\Delta x$.

[Ec. 12]

$$a_{\frac{N}{2}} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_n (-1)^n =$$

$$= \frac{2}{N} (h_0 - h_1 + h_2 - \dots - h_{N-1})$$

$$\text{y } b_n = 0$$

$$\text{ya que } \cos \frac{2\pi}{N} Qn = \cos \pi n = -1^n \text{ y}$$

$$\text{y } \sin \pi n = 0$$

Si N es par, la frecuencia asociada a $Q = N/2$ es π . En este caso:

Como en ingeniería de firmes es más intuitivo hablar de longitudes de onda que de frecuencias, recuerdese que la relación entre ambas, siendo Δx la equidistancia entre puntos, viene dada por:

[Ec. 13a]

$$\text{Frecuencia } \omega_k = \frac{2\pi k}{N}$$

[Ec. 13b]

$$\text{Longitud de onda } L_k = \frac{N \Delta x}{k}$$

La forma polar de la TDF se ob-

TABLA 1 RESULTADOS DE LA DESCOMPOSICION DISCRETA DE FOURIER (TDF)

Número de datos del fichero del perfil longitudinal $N =$	560
Media real de las cotas leídas del perfil longitudinal	-0.01659
Varianza real de las cotas leídas del perfil longitudinal	1409.16455
Media obtenida del análisis de Fourier	0.00140
Varianza obtenida del análisis de Fourier	1408.67517

Nota: las amplitudes de las ondas componentes viene en las mismas unidades que las cotas del perfil longitudinal

Frecuencia Armónico número	Longitud de onda (m)	Amplitud seno (mm)	Amplitud coseno (mm)	Amplitud A_n (mm)	Fase (radianes)
1	140.0000000	0.0000000	-0.0331860	0.0331860	-1.5707962
2	70.0000000	0.0000000	-0.0331860	0.0331860	-1.5707962
3	46.6666667	0.0000000	-0.0331860	0.0331860	-1.5707961
4	35.0000000	0.0000000	-0.0331860	0.0331860	-1.5707960
5	28.0000000	0.0000000	-0.0331860	0.0331860	-1.5707959
19	7.3684211	0.0000000	-0.0331860	0.0331860	-1.5707837
20	7.0000000	47.2999992	-0.0331846	47.3000107	-0.0007016
21	6.6666665	-0.0000004	-0.0331860	0.0331860	1.5707834
27	5.1851850	-0.0000001	-0.0331858	0.0331858	1.5707945
28	5.0000000	-0.0000007	15.1668138	15.1668138	-1.5707963
29	4.8275862	-0.0000000	-0.0331862	0.0331862	1.5707949
69	2.0289855	0.0000006	-0.0331860	0.0331860	-1.5707791
70	2.0000000	18.7000008	-0.0331841	18.7000294	-0.0017746
71	1.9718310	-0.0000006	-0.0331860	0.0331860	1.5707782
279	0.5017921	-0.0000000	-0.0331860	0.0331860	1.5707963
280	0.5000000	-0.0000000	-0.0331860	0.0331860	1.5707963

tiene observando que los pares (a_k, b_k) pueden considerarse también como la abscisa y la ordenada de un vector de módulo A_k y ángulo ϕ_k :

[Ec. 14]

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} ; \phi_k = \arctan \frac{b_k}{a_k}$$

$$\sin \phi_k = \frac{b_k}{A_k} ; \cos \phi_k = \frac{a_k}{A_k}$$

La sucesión de pares (A_k, ϕ_k) es la TDF de $\{h_n\}$ en forma polar.

El gráfico $\{A_k\}$ versus k se suele denominar periodograma o espectro empírico de amplitud, y el gráfico $\{\phi_k\}$ versus k se denomina espectro empírico de fase.

Con estas expresiones se obtienen las amplitudes de las curvas seno y coseno componentes del perfil. Si se desea descomponer el perfil sólo en curvas seno cada una con su amplitud y su fase, se calculan las amplitudes y fases correspondientes por medio de las fórmulas [14]. El programa que se incluye en este artículo da ambas representaciones en un fichero ASCII. Ver ejemplo en la *Tabla 1*.

Al utilizar la descomposición de Fourier se suele encontrar en la literatura el gráfico llamado "densidad espectral" o "densidad de potencia", que no es más que la representación en ordenadas de la amplitud A_k al cuadrado con la correspondiente frecuencia o longitud de onda en abscisas. El nombre más adecuado de este gráfico es el de "periodograma", habitualmente utilizado en estadística.

Los coeficientes $2/N$ que multiplican a la sumatoria en las expresiones [7a y b] permiten obtener las amplitudes en unidades reales, las mismas en que se mide el perfil longitudinal. En cada texto sobre la descomposición discreta se utilizan coeficientes distintos, pero como puede verse en el ejemplo incluido a continuación, es posible obtener a partir de las citadas expresiones [7a y b] directamente las amplitudes en las mismas unidades en que vienen medidas las cotas del perfil longitudinal. La correspondiente rutina de cálculo, que no se encuentra en ninguno de los textos a que el autor ha tenido acceso, es el objeto principal del presente



Figura 3a. Perfil longitudinal de una carretera horizontal formada por la suma de tres sinusoides horizontales, de longitudes de onda, 2, 5 y 7 m y amplitudes respectivas 18,7, 15,2 y 47,3 m.

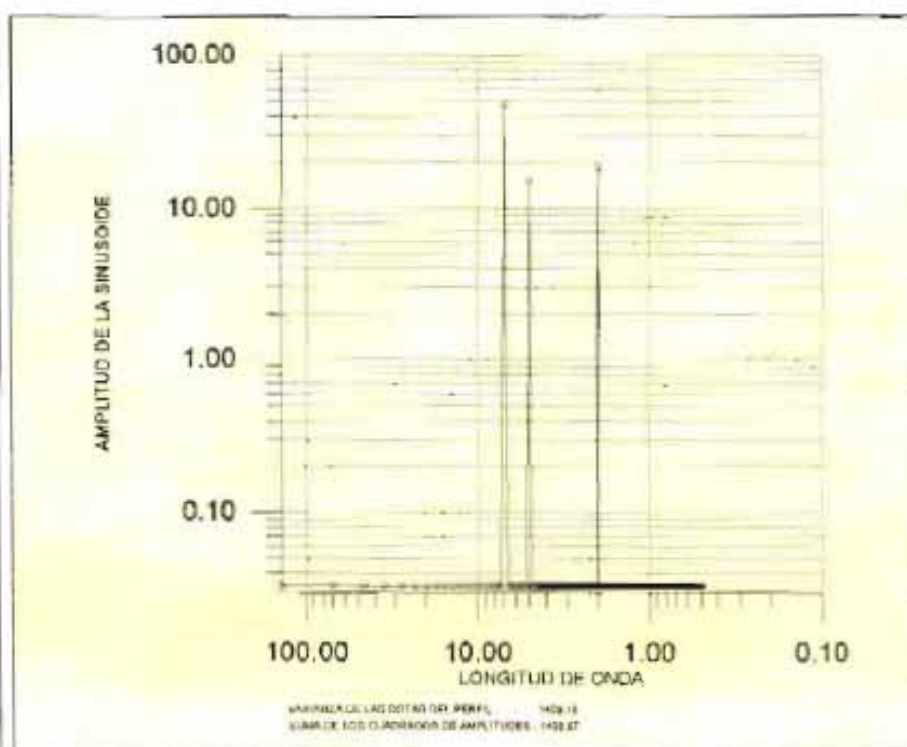


Figura 3b. Espectro o periodograma de amplitudes de la carretera anterior. Todas las amplitudes son nulas (por ser horizontal) salvo en las 3 longitudes de onda anteriores. En estas aparecen las 3 amplitudes de la Fig. 3a.

artículo. En las figuras 3a y b puede verse una carretera teórica, formada por dos curvas seno y una coseno, y cómo la TDF devuelve las tres curvas con sus amplitudes

exactas y sus longitudes de onda.

Con N puntos separados una distancia Δx , las longitudes de onda que proporciona la transformada discreta se obtienen por la ex-

presión $L_k = N \Delta x / k$ [13 b], de forma que para $k = 1$ se obtiene $L_1 = N \Delta x$, y para $k = N/2$ se obtiene $L_{N/2} = 2 \Delta x$. La transformada es simétrica, de forma que las longitudes obtenidas para $k = N/2$ a N son las mismas anteriores, y por ello sólo se calculan en el intervalo $[0, N/2]$. Se insiste de nuevo al lector en el hecho de que el primer elemento del periodograma A_0 es igual al doble de la media de las cotas, ya que de [7] se deduce que para el caso $k = 0$ resulta $b_0 = 0$, y a_0 es igual a 2 veces la media de los valores h_k . Es decir, el primer valor del periodograma es el doble de la media de las cotas del perfil longitudinal.

3. Rutina de cálculo de la Descomposición Discreta de Fourier.

El cálculo de las amplitudes es sumamente sencillo de programar a partir de lo anterior, y su listado en C se incluye a continuación en la columna central.

El lector entenderá que se han eliminado del listado todas las inicializaciones de variables y otras sentencias no imprescindibles para seguir el algoritmo.

Obsérvese que el cálculo de la transformada discreta de Fourier en este sencillo caso es muy simple, ya que se reduce a aplicar las citadas fórmulas [7a y b]. Para cada frecuencia armónica de la fundamental $2\pi/N$ se obtienen las amplitudes de los senos y cosenos asociados, y a partir de ellas se obtiene también la amplitud de la onda sinusoidal total, junto con su fase, según las fórmulas [14]. El programa completo de cálculo de la transformada discreta de Fourier, con sus listados, está a disposición de los lectores interesados.

4. El Teorema de Parseval en funciones discretas.

Con los coeficientes de la sumatoria dados en las fórmulas [7] el Teorema de Parseval toma una expresión muy sencilla y directa. Siendo N el número de puntos del perfil longitudinal, h las cotas del

```
void calcula_fourier_discreta ()
{
/* Rutina de Fourier Transform
(No FFT)
ndatos es el número de puntos
del perfil
y número_de_valores es N/2 o
N/2 + 1 dependiendo
de si N es par o impar
a1 y b2 son las amplitudes de las
ondas coseno y seno
El vector periodograma almacena
las amplitudes de las curvas
totales seno correspondientes
*/
frecuencia_fundamental = 2.0 *
PI / ndatos;
for (k = 1; k <= número_de_valores; ++k)
```

```
{
a1 = 0.0;
b2 = 0.0;
w1 = frecuencia_fundamental
* (k - 1);
t = 1;
rewind (EntradaDatos);
while (!feof(EntradaDatos))
{
lee_una_cota ();
w2 = w1 * t;
a1 = a1 + cota * cos (w2);
b2 = b2 + cota * sin (w2);
++t;
}
a1 = 2.0 * a1 / ndatos;
b2 = 2.0 * b2 / ndatos;
ampl_seno(k) = b2;
ampl_coseno(k) = a1;
periodograma[k] = a1 * a1 +
b2 * b2;
}
longitud_total = ndatos *
incrim_x;
/* Impresión de los resultados en
un fichero ASCII */
for (k = 1; k < número_de_valores; ++k)
{
longitud_de_onda = longitud_total / k;
fprintf (SalidaDatos, "%5d\n",
longitud_de_onda,
ampl_seno[k + 1], ampl_coseno[k + 1],
sqrt (periodograma[k + 1]),
atan (ampl_coseno[k + 1] /
ampl_seno[k + 1]));
}
}
```

perfil y A las amplitudes dadas en [14], resulta, recordando que la cota media $\bar{h}$ es igual a $a_0/2$ y que la varianza de la serie de cotas es $\sigma^2 = (\sum (h_i - \bar{h})^2) / N$:

[Ec. 15a]

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (h_k - \bar{h})^2 = \sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N A_k^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \quad (N \text{ impar})$$

[Ec. 15b]

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (a_k^2 + b_k^2) + a_0^2 \quad (N \text{ par})$$

La interpretación de este teorema es inmediata. La varianza de las cotas del perfil longitudinal es igual a la mitad de la suma de los valores del periodograma excepto el primero A_0 , es decir, a la suma de los cuadrados de las amplitudes de las sinusoides componentes del perfil. El amable lector, si ha llegado hasta aquí sin aburrirse, recordará (Ec. 11) que el primer elemento del periodograma, es decir, la amplitud correspondiente a la frecuencia o longitud de onda fundamental, es igual al doble de la media de los valores de las cotas. Por ello no suele representarse en los gráficos de amplitudes.

En realidad, la irregularidad superficial de una carretera no es más que un problema de varianza de las cotas del perfil. Si la varianza es nula, la regularidad es perfecta, y al ir aumentando la varianza va aumentando la irregularidad. El Teorema de Parseval descompone esta varianza en las contribuciones de cada longitud de onda, y permite al Ingeniero de Firmes saber cuáles son las longitudes de onda que causan un IRI malo, por ejemplo, o qué contribución a la varianza total está recogida en la banda de macrotextura gruesa o fina. Por otra parte, la importancia práctica del Teorema de Parseval es muy grande, porque permite comprobar inmediatamente la bondad de la descomposición. El programa de cálculo que se incluye efectúa esta comprobación y la expresa en pantalla al terminar los cálculos, lo que garantiza al usuario del programa que la descomposición en frecuencias es correcta.

5. Problemas de la descomposición discreta de Fourier. Frecuencias de Nyquist.

En el caso de funciones continuas, a partir de las ecuaciones [1] o [2] es posible obtener una serie (teóricamente infinita) de sinusoides de longitudes de onda crecientes, cada una de las cuales tiene una amplitud A_n . Si se dibuja el gráfico longitud de onda (abscisas) y amplitud (ordenadas) se obtiene una curva continua de amplitudes frente a longitudes de onda, y cuyas ordenadas son "densidades" de amplitud, es decir, amplitud dividida por longitud de onda.

En el caso de una función discreta como la serie de puntos tomados al medir el perfil longitudinal de una carretera, el problema tiene unas particularidades que aparecen por el propio hecho de ser una muestra discreta. Estas particularidades son tres fundamentales, que afectan de forma muy importante a los resultados obtenidos de la descomposición.

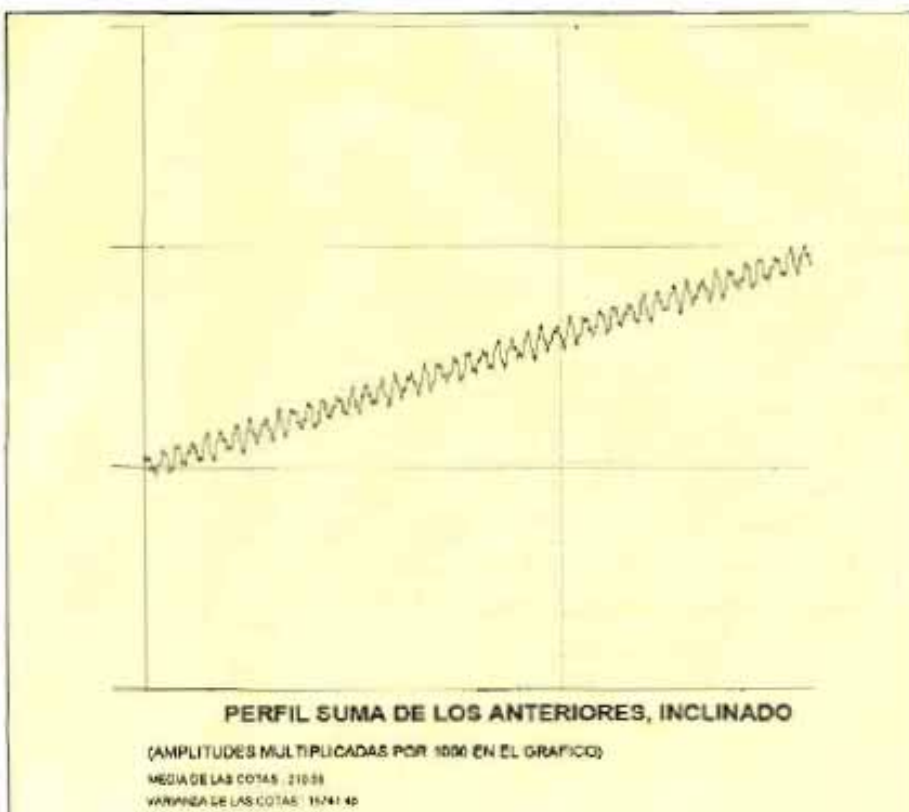


Figura 3c. La misma carretera de la figura 3a pero con pendiente longitudinal. Obsérvese que la media de las cotas y su varianza son mucho mayores que en la carretera horizontal.

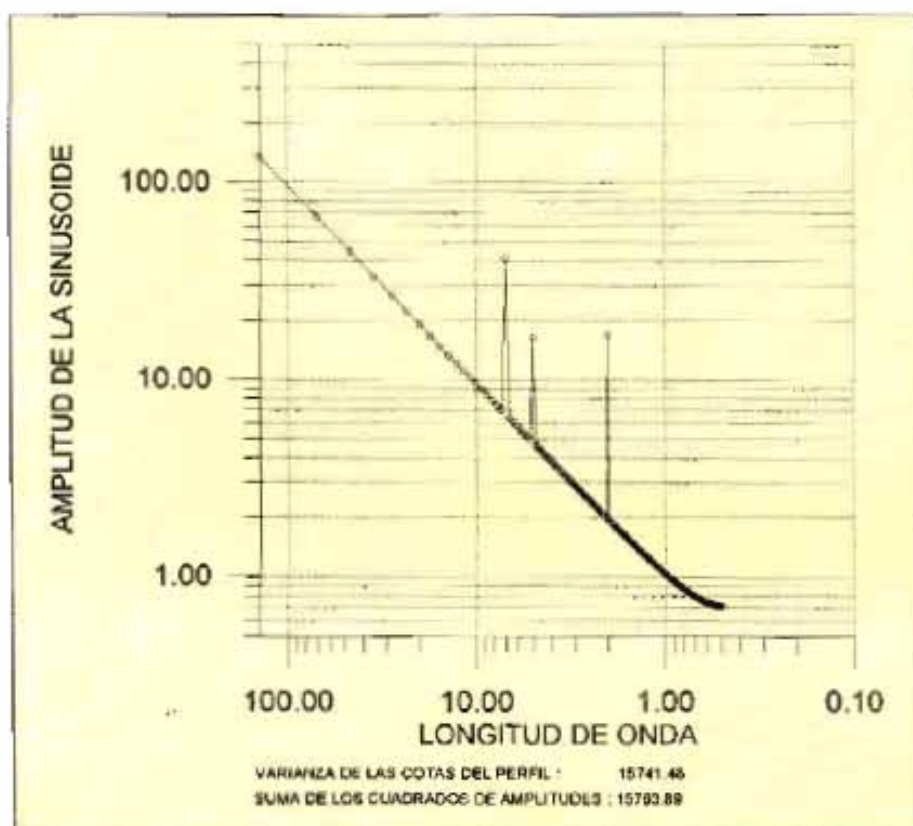


Figura 3d. Espectro de la carretera de la figura 3c. La pendiente de la carretera se traduce en el espectro en amplitudes grandes para longitudes de onda grandes. Siguen apareciendo los 3 picos en las 3 ondas componentes. La suma de los cuadrados de las amplitudes es igual a la varianza de las cotas (Teorema de Parseval).

1. *Longitud de onda de Nyquist.* Si se han tomado N puntos del perfil longitudinal, separados entre sí una distancia Δx , la longitud L de carretera analizada es $L = N \Delta x$, y el intervalo de longitudes de onda que se puede analizar es el acotado por las llamadas Longitudes de Onda de Nyquist $2 \Delta x$ y L :

- La longitud de onda mayor que puede analizarse es L , fenómeno que se intuye perfectamente ya que la mayor longitud de onda que puede observarse es la que corresponde a la longitud del tramo de carretera analizado.

- La longitud de onda menor que puede analizarse es $2 \Delta x$, fenómeno que también se intuye perfectamente ya que, como la distancia entre puntos es Δx , no podrán observarse sinusoides de longitud de onda menor que $2 \Delta x$.

En la literatura suele hablarse de las Frecuencias de Nyquist, pero en el caso particular de las carreteras el autor opina que es más intuitivo hablar de sus correspondientes longitudes de onda.

2. *Teorema del Muestreo.* Si el perfil de la carretera no tuviera com-

“

*oda la
matemática e ingeniería
detrás del IRI, fourier,
texturas y longitudes de onda
es inútil si el ingeniero de
obra no cuida las plantas de
producción, los equipos de
extendido, el ritmo de
alimentación y la
uniformidad de calidad del
hormigón blanco o negro.”*

ponentes de longitud de onda menores que la menor de Nyquist $2\Delta x$, quedaría totalmente definido por los valores obtenidos en la muestra tomada [4], [11], [16]. En este caso se dice que el perfil es de banda limitada, es decir, que su banda de longitudes de onda está limitada por debajo en el valor $2\Delta x$.

3. **Aliasing.** Si el perfil real no es de banda limitada por debajo de $2\Delta x$, aparece el importantísimo fenómeno del “solapamiento” o “doblado” o “aliasing” [4], [16]. Las amplitudes correspondientes a las longitudes de onda menores de $2\Delta x$ aparecen solapadas en las frecuencias comprendidas en el intervalo de Nyquist [$2\Delta x$, L]. Si se ha muestreado el perfil cada 12,5 cm, las amplitudes de las longitudes de onda menores de 25 cm quedan incluidas de forma espuria en el intervalo de Nyquist. El fenómeno, aunque puede parecer increíble al profano, es muy conocido en los ambientes estadísticos, donde a partir por ejemplo de una serie de datos mensuales es posible inferir oscilaciones semanales, e incluso en algunos casos los ciclos circadianos (día-noche). El aliasing debe tener muy en cuenta al analizar un perfil de carretera medido con equipos no comprobados a nivel mundial, o manejados por técnicos sin la adecuada preparación. En algunos casos pueden identificarse problemas en longitudes de onda que realmente no los tienen, sino que proceden del aliasing de una longitud de onda mucho menor. Debe extremarse el cuidado, y exi-

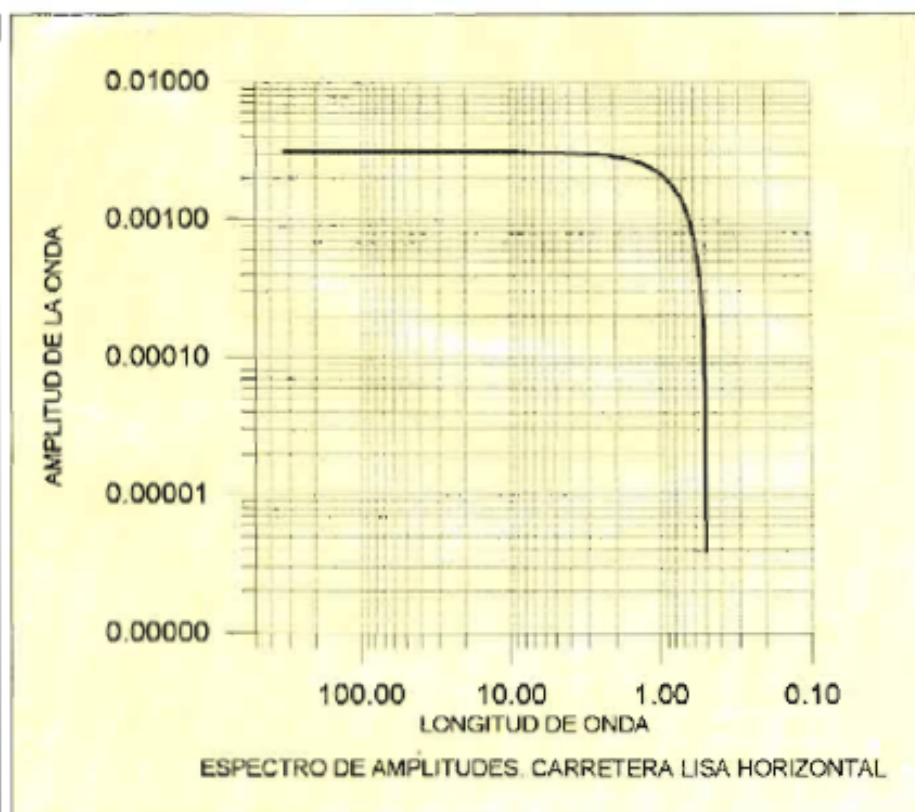


Figura 3 e. Espectro de amplitudes de una línea recta horizontal, comenzando y terminando en 0. El espectro de una recta horizontal infinita es la función impulso, una sola sinusoides de longitud de onda infinita.

gir en todos los casos un estudio detallado antes de dar por bueno un análisis de “densidades espectrales” como los que suelen incluirse actualmente en España y de los que no se explica ni con qué algoritmo se han obtenido ni lo que realmente quieren decir.

6. Ejemplo. Carretera suma de curvas seno y cosenos (Figura 3a b, c y d).

Para aclarar lo anterior, supóngase un perfil longitudinal de carretera obtenido sumando una sinusoides de longitud de onda 2 m y amplitud 18,7 mm, una curva coseno de longitud de onda 5 m y amplitud 15,2 mm y una tercera sinusoides de longitud de onda 7 m y amplitud 47,3 mm. (Se toman estos valores de amplitud inexactos para que el lector pueda comprobar los resultados de la TDF. (Ver Tabla 1). Supóngase que se mide el perfil longitudinal de la carretera cada 25 cm (o, como suele decirse, se muestrea cada 25 cm). El fichero de cotas obtenido puede calcularse en LOTUS con gran sencillez. Como las longitudes de onda de la descomposición se obtienen

de la expresión $L_k = N \Delta x / k$, para que aparezcan exactamente las longitudes de onda de 2,5 y 7 m es necesario que $N \Delta x$ sea múltiplo de $70/0,25 = 280$. Se toma por tanto $N = 560$ puntos, lo que quiere decir que la longitud L muestreada es $560 \cdot 0,25 = 140$ metros.

Descomponiendo esta serie de cotas en longitudes de onda y sus amplitudes correspondientes por medio de las fórmulas [7a y b] se obtiene la Tabla 1, en la que se observa:

a. La mayor longitud de onda analizada es de 140 m, que corresponde a la longitud del tramo estudiado. Es la longitud de onda superior de Nyquist.

b. La menor longitud de onda analizada es de 0,5 m, es decir, el doble del intervalo de muestreo $L_2 = 2\Delta x = 2 \cdot 0,25 = 0,50$ m. Es la longitud de onda inferior de Nyquist.

c. El número de longitudes de onda analizadas es la mitad del número de puntos de la muestra $N/2 = 280$. Sin embargo, esto no es realmente así. Aunque las longitudes de onda analizadas son sólo las comprendidas entre 1 y $N/2$, ya se

ha dicho que es porque las frecuencias simétricas comprendidas entre 0 y $N/2$ son iguales a las primeras. Las frecuencias negativas dan una amplitud igual a la de su correspondiente positiva, y por ello no se suelen calcular en la Transformada Discreta de Fourier.

d. Las longitudes de onda obtenidas de la descomposición discreta de Fourier corresponden a los distintos armónicos de la frecuencia fundamental. Siendo N el número de puntos de la muestra (en este caso $N = 560$) e Δx la distancia de muestreo (en esta $\Delta x = 0,25$ m), se obtienen por medio de la expresión $\lambda = N \Delta x / k$, donde k varía de 1 a $N/2$.

e. La transformada discreta de Fourier devuelve las dos curvas senos y la curva coseno que formaban el perfil, cada una con la misma amplitud y longitud de onda de las curvas origen. Ello es porque en la rutina de TDF que se propone se ha elegido la constante adecuada $2/N$ en las fórmulas [7a y b]. Todas las amplitudes son cero para el resto de las longitudes de onda.

7. La Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform, FFT).

Con el programa anterior queda resuelto el problema del cálculo de la descomposición del perfil longitudinal de una carretera en sus ondas componentes. Se obtiene como resultado un listado en el que para cada longitud de onda se obtiene la amplitud y fase de cada senoide componente. De esta forma puede comprobarse si existen amplitudes altas para las longitudes de onda que acusa el IRI (cerca de los 2 m, ver [1]), o la Regla de 3 m (3m) o el Viógrafo (9,31 m, ver [7]). En el caso de Aeropuerto, las longitudes de onda peligrosas son mucho mayores, cerca de los 100 m, dependiendo del tipo de avión.

Sin embargo, este programa, que por otra parte no es más que hacer en C lo que Fourier inventó e hizo a mano en 1807, tiene un problema, y es que tarda muchísimo en hacer los cálculos, porque para cada una de las longitudes de onda analizadas tiene que operar en dos bucles con todos los puntos del perfil longitudinal. Como puede

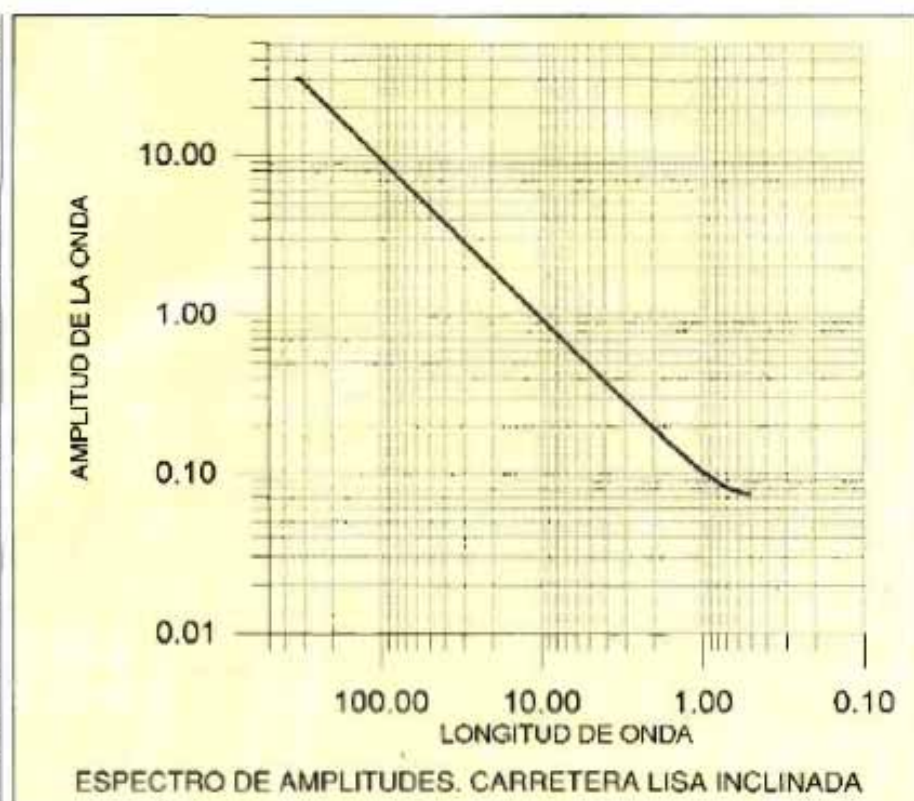


Figura 3 f. Espectro de amplitudes de una línea recta inclinada, comenzando y terminando en 0.

verse en el listado anterior, el bucle principal va desde el armónico 1 hasta el armónico $N/2$. En cada paso del bucle calcula otro bucle que va desde 1 hasta N y en el que se calculan funciones que llevan mucho tiempo de proceso, como el seno y el coseno. El número total de operaciones es proporcional a $N^2/2$. En el caso del perfil longitudinal de un tramo de 1 km de largo, muestreado a 0,25 m se tienen 4 (00) puntos, y el número de pasos de la rutina es de 8 millones. En un ordenador 486 de 25 MHz y disco de 13 ms de acceso se tardan 43,4 minutos. Para medio km se tardan 10,8 minutos y para 250 m de perfil 2,7 minutos. Puede acelerarse mucho la velocidad si se utiliza un disco en RAM o si se llevan los valores del perfil a memoria en lugar de leerlos de disco cada vez, que es la operación más lenta de un ordenador, pero no deben llevarse a vectores que ocupen posiciones contiguas de RAM, sino que deben situarse en una lista enlazada sencilla (ya que sólo hay que leer de principio a fin). La técnica correspondiente puede verse en [8]. En cualquier caso, el programa lee de disco para que pueda usarse en máquinas con poca RAM.

El hecho de que esta rutina tarde tanto en los cálculos hizo que durante muchos años, hasta que han aparecido los rápidos personales baratos, no se pudiera utilizar con efectos prácticos. La solución fue la aparición de la Transformada Rápida de Fourier, algoritmo desarrollado por Cooley y Tukey en 1965, y que en lugar de necesitar $N^2/2$ pasos del bucle necesita solamente $N \log_2 N$, es decir, en lugar de los 8 millones de pasos del ejemplo anterior necesita solamente 47863, reduciendo el tiempo de cálculo 167 veces. La rutina es sumamente elegante e ingeniosa, y su detalle puede verse en cualquier texto [4], [9]. De hecho, es tan ingeniosa que no sorprende lo que dice Cody [6] en el sentido de que fue el propio Gauss quien en los primeros años del siglo 19 ya describió un algoritmo similar, aunque indica que nunca se publicó. Reid [14] indica por el contrario que hay referencias a este algoritmo en el Volumen 3 de la obra de Gauss, publicada por la Sociedad Real de ciencias de Gotingen en 1876. En el momento de escribir estas líneas el autor aún no ha podido conseguir dicho volumen.

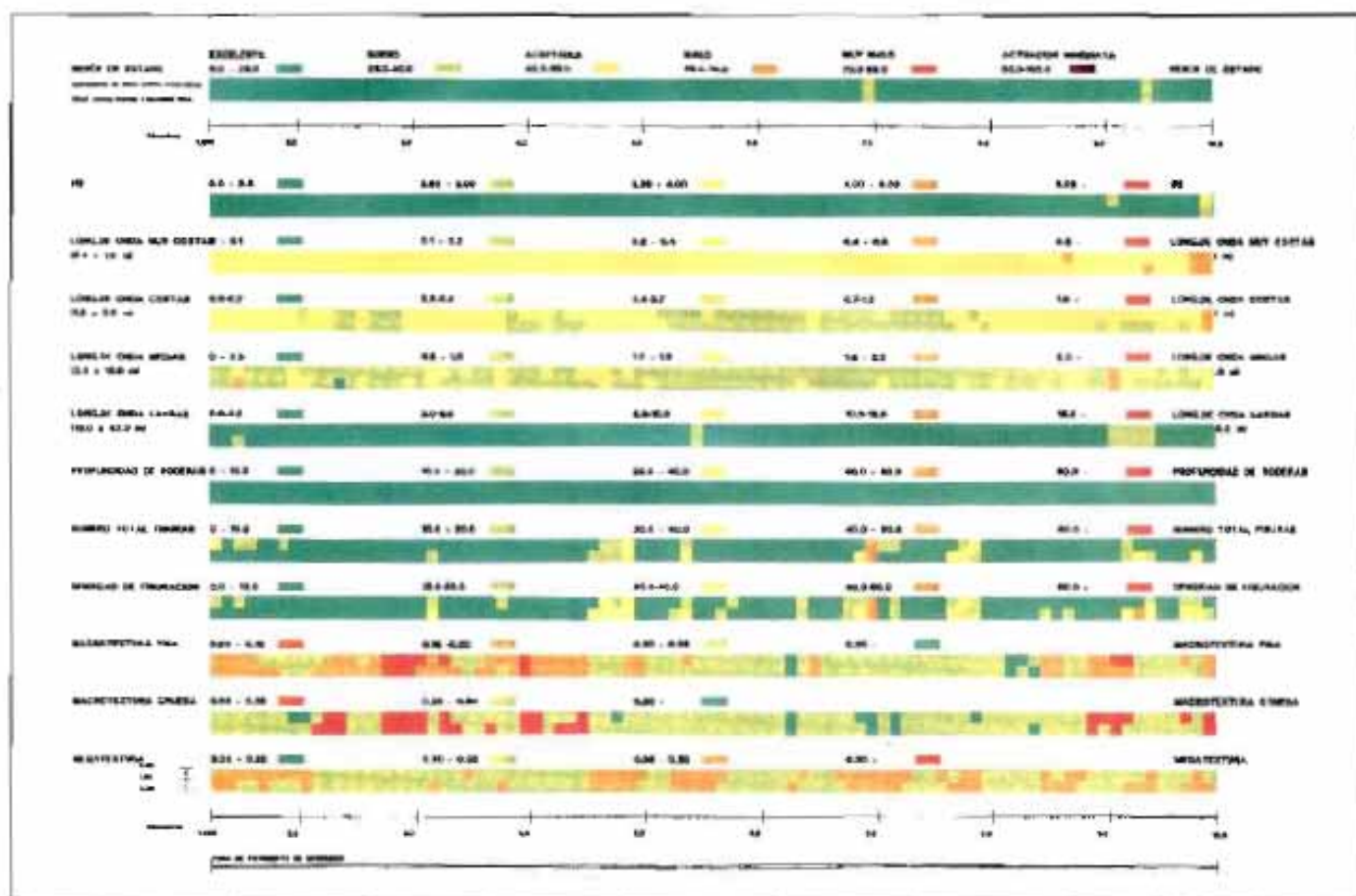


Figura 4. Representación gráfica de las amplitudes de las longitudes de onda de una carretera. En lugar de dibujar periodogramas suele representarse en código de colores la RMS (media cuadrática) de las amplitudes de cada banda de longitudes de onda (texturas, etc.). Además se suele representar el IRI, y todo ello para cada mitad de cada carril, es decir, para cada rodada.

La transformada rápida de Fourier viene programada en todos los paquetes estadísticos de ordenador, hasta en los más sencillos. El autor recomienda al lector interesado en este tema la utilización del SAS, aunque es tan caro y tiene tantas protecciones que su uso sólo se justifica para trabajos estadísticos grandes y continuos. Otros paquetes que pueden utilizarse son el CSS, RATS, el SPSS, el StatGraph y las rutinas Quinn-Curtis.

8. Ventajas y desventajas de la Transformada Rápida de Fourier.

La principal ventaja de la FFT es la rapidez. Pero para el ingeniero de firmas tiene una desventaja muy importante, desgraciadamente, que es el hecho de que por su propia naturaleza exige que el número de puntos del perfil longitudinal a analizar sea potencia de 2. En la mayoría de las rutinas FFT

que se encuentran, esto quiere decir que el número de puntos debe ser uno de la sucesión (2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,2048,4096,8192,16384,32768,65536,131072, etc.). En el análisis de 2 km de carretera muestreados a 12,5 cm (por ejemplo, con el Video Láser RST) se obtienen 16000 puntos y, habría que tomar exactamente 384 puntos más, equivalentes a 48 m, para poder aplicar la FFT. En la mayor parte de los casos prácticos se tienen ficheros con varios miles de puntos, y el tener que reducirlos a alguno de los valores anteriores significa perder información que ha costado mucho obtener. De hecho, CSS, RATS y algún otro programa pueden cubrir los datos que faltan con una determinada serie de números (padding), y SAS resuelve el problema de forma más eficaz, pero no es frecuente encontrar ingenieros que lo manejen, los tiene que manejar uno mismo, y es demasiado complicado su uso para utilizaciones

eventuales. Además es raro encontrar rutinas FFT que admitan más de 4096 datos, mientras que en los ejemplos que siguen, y con la rutina que se incluye, pueden analizarse datos en cantidad mucho mayor.

La Transformada Discreta de Fourier (TDF) cuyo algoritmo se ha listado antes no tiene esa limitación, y por ello se recomienda su uso ya que el tiempo de ordenador ha dejado de costar dinero. Puede dejarse el micro funcionando por la noche y tener los resultados a la mañana siguiente en la mesa del despacho si es un 286. Con un 486 se tienen en unos minutos.

9. La "Densidad Espectral de Energía".

Si en lugar de graficar las amplitudes obtenidas para cada longitud de onda se grafica el cuadrado de las mismas en ordenadas, y en abscisas la correspondiente longitud de onda o su frecuencia asociada, se obtiene una serie de valores

que es posible analizar es precisamente la longitud del tramo muestreado. Esta longitud de onda corresponde a la frecuencia fundamental. Las longitudes de onda de los sucesivos armónicos que se obtienen se calculan a partir de la longitud de onda fundamental $L = N\Delta x$, dividiéndola por la sucesión de números naturales 1, 2, 3... $N/2$, donde N es el número de puntos del perfil longitudinal. De esta forma, la menor longitud de onda que es posible analizar es precisamente $2\Delta x$.

a. *Longitudes de onda próximas a las de gran amplitud.*

En el ejemplo de la figura 3 se ha tomado un número $n = 560$ puntos y un $\Delta x = 0,25$. Se han elegido estos valores porque se sabía que las únicas longitudes de onda componentes eran las de 2,5 y 7 m, y que estas longitudes de onda iban a aparecer exactas en la lista de longitudes de onda obtenidas, ya que $N\Delta x = 560 \cdot 0,25 = 140$, que es un múltiplo exacto de 2,5 y 7. Si se hubieran tomado por ejemplo sólo 500 puntos, las longitudes de onda 2, 5 y 7 no aparecen exactamente, y las amplitudes que les corresponden se reparten en las frecuencias más próximas a cada una de las tres, cumpliéndose siempre el Teorema de Parseval. El lector puede comprobarlo con el programa que se ha descrito.

b. *Carretera con pendiente longitudinal.*

Si al perfil horizontal se le suma una pendiente, se alteran muy poco su transformada discreta y su periodograma. Aparecen amplitudes en las longitudes de onda mayores, y ello es porque la TDF interpreta la inclinación de la carretera como ondas de muy larga longitud, y al no existir longitudes de onda mayores que la mayor de Nyquist, reparte las amplitudes que corresponderían entre las mayores longitudes obtenidas en el cálculo. Varía también la media, mitad del primer valor del periodograma (que no se imprime en el presente programa), ya que la media de las cotas ha variado (Ver figura 3c).

c. *Primera diferencias del perfil de la carretera.*

Si se toman las primeras diferencias del perfil longitudinal de la

“Las medidas y análisis de la capa de rodadura de una carretera recién terminada no son más que una autopsia. La ingeniería de firmes debe comenzar desde la subbase para poder obtener autovías de calidad sin tener que fresar o rectificar después.”

carretera, la transformada discreta del perfil resultante tiene las mismas longitudes de onda del perfil original, pero las amplitudes correspondientes quedan ligeramente deformadas. Calcular la primera diferencia del perfil equivale en realidad a pasar un filtro que elimine la tendencia, es decir, la pendiente. De una carretera con pendiente se pasa a una carretera horizontal. La variación de amplitudes puede explicarse por la teoría de filtros digitales, pero se entiende que como además de las sinusoides propias del tramo ya hay una o varias sinusoides de muy diversa longitud de onda introducidas al obtener las diferencias, las amplitudes de las primeras deben ser distintas si la suma total de todas las sinusoides debe volver a representar el perfil original.

d. *Diferencias segundas del perfil longitudinal.*

Si en un perfil longitudinal tomado en una zona de acuerdo parabólico se toma la diferencia segunda, la transformada discreta del perfil resultante acusa las mismas longitudes de onda que el perfil real. Las amplitudes quedan sin embargo modificadas por el efecto del filtro y su variación se explica también por la teoría de filtros digitales y por la consideración anterior.

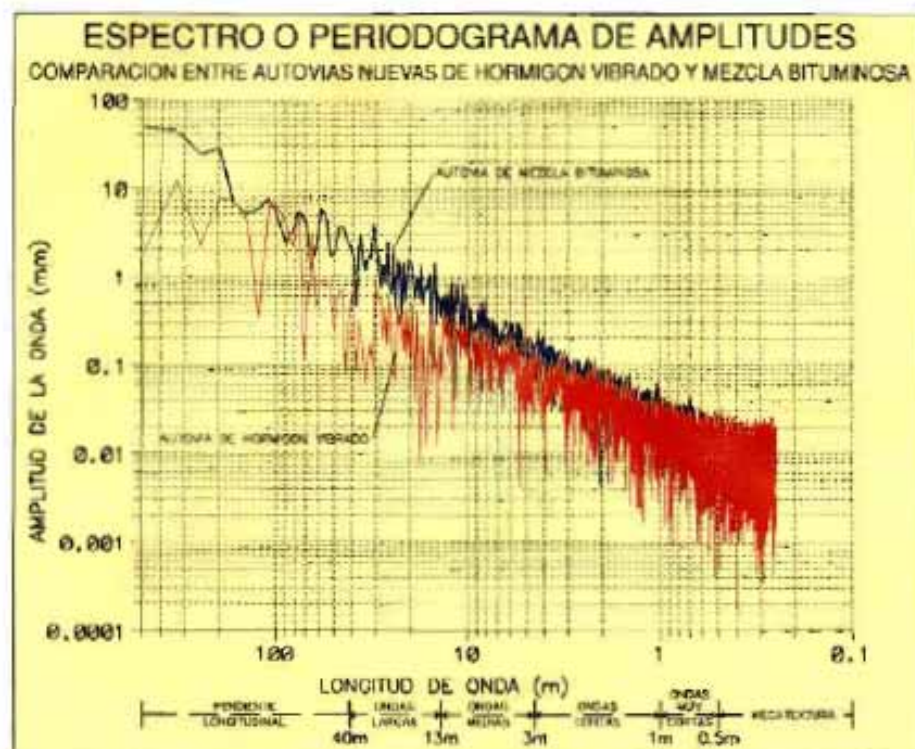
11. Obtención de las Bandas de longitudes de onda. Filtros digitales.

Las bandas de longitud de onda

más importantes en carreteras y los correspondientes parámetros asociados a ellas son las que se han descrito al comienzo del presente artículo. La división del perfil longitudinal en bandas de frecuencias se lleva a cabo por medio de filtros digitales. Estos filtros se denominan de "paso bajo" o "paso alto" si permiten el paso de las bajas o altas frecuencias (altas o bajas longitudes de onda) respectivamente. Los filtros "pasabanda" permiten el paso de las componentes de una cierta banda de longitudes de onda y su aplicación permite separar las bandas anteriores. El diseño y funcionamiento de los filtros digitales más utilizados (FIR, IIR, Butterworth, etc.) se verá en un próximo artículo.

Aunque para las aplicaciones prácticas del ingeniero de firmes no parezca muy útil la aplicación de los filtros, sí lo es para los diseñadores de los equipos de auscultación, ya que su elevadísima frecuencia de muestreo permite trabajar con longitudes de onda del orden de algunos milímetros, entrando las menores por aliasing. El ingeniero de firmes puede trabajar con longitudes de onda variables desde 25 o 50 cm hasta algunos cientos de metros, lo que le permite analizar en detalle solamente megatexturas, IRI y ondas mayores. En los informes de auscultación del equipo video láser RST pueden incluirse si se desea perfiles longitudinales con intervalo de muestreo de 12,5 cm. Esto permite un análisis de longitudes de onda suficientemente detallado para, por ejemplo, detectar a tiempo defectos en los equipos de extendido, trabajo iniciado brillantemente por Sánchez Blanco [12] en 1969 pero del que el autor desconoce hasta el momento si ha habido continuación práctica para la construcción de carreteras en España.

El Video-Láser RST con lámparas láser de 32 kHz muestrea a 32 000 pulso por segundo. La banda inferior de longitud de onda de la macrotextura fina (1 mm) se analiza bien a velocidades inferiores a 40 km/h, pero a velocidades del orden de los 100 km/h el ruido de fondo ya hace subir este límite a unos 5 mm. Sin embargo se ha comprobado experimentalmente



que a cualquier velocidad el valor RMS obtenido con áridos de 1 mm de diámetro medio es inferior, como es de esperar, al obtenido con áridos de 2 mm. Actualmente se están terminando los trabajos en el aumento del ancho de banda del sistema, lo que permite eliminar los problemas del ruido en las altas frecuencias (menores longitudes de onda) de la macro fina y analizar la micro. Con ello, y tal vez lámparas de mayor frecuencia de muestreo (64 kHz) y menor diámetro del rayo láser si es necesario se podrá intentar estimar, la adherencia neumático-pavimento.

12. Fisuración. Utilidad práctica de la TDF para el Ingeniero de Firmes.

El perfil longitudinal se mide a lo largo de una línea ideal sobre el carril de la carretera, línea representada por la trayectoria de la lámpara láser que mide el perfil. Pero es evidente que para el adecuado análisis del estado de una carretera no es suficiente con medir el perfil longitudinal sobre una línea, ya que un carril tiene un ancho de 3,50 m. Lo que suele hacerse en España es utilizar equipos con 11 lámparas láser como mínimo, de forma que las medidas de cada lámpara representan un ancho de $350 / 11 = 31,8$ cm de carril. En la última auscultación realizada hace unos meses (Abril 92) en la Red de Autopistas Alemanas se ha utilizado el Video-Láser RST de 20 lámparas, con lo que el ancho correspondiente a cada lámpara es aún menor, de 17,5 cm.

Por medio del análisis del perfil longitudinal con la TDF puede obtenerse el estado de la carretera con un enorme nivel de detalle. En el gráfico adjunto (Figura 4) se incluye un ejemplo de la representa-

Figura 6. Comparación entre espectros de amplitudes de hormigón vibrado y mezcla bituminosa. La diferencia entre ambos en longitudes de onda de 10 m y mayores se debe probablemente a la influencia de la pendiente longitudinal. Las diferencias en megatextura, macrotextura y microtextura no pueden apreciarse en este espectro. El tramo de hormigón vibrado es el azul de la figura 5.



ción gráfica que se obtiene como resultado de las medidas. Se suelen representar valores medios cada 100 metros del IRI y las amplitudes cuadráticas medias (RMS) de las ondas largas, medias, cortas y muy cortas, así como de la megatextura y las macrotexturas gruesa y finas. Se representa además la profundidad de rodadas y el conteo de fisuras.

Aunque de estos temas no se trata en el presente artículo, debe indicarse que el análisis de la fisuración se basa en el mismo principio de medida del perfil longitudinal. Si al ir midiendo el perfil se detecta un aumento repentino en la profundidad de un defecto, este defecto se cuenta como fisura. Para separar las fisuras de los defectos debidos a macrotextura se va teniendo en cuenta la amplitud media RMS de la banda de macrotextura, y los defectos menores que dicha RMS se toman como macrotextura en lugar de como fisuras. El ancho de la fisura se calcula a partir del tiempo que tarda en desaparecer el aumento repentino de profundidad del defecto observado, y la profundidad se toma como la media observada durante este tiempo. Las fisuras transversales se identifican como tales si dos o más medidores láser se observan simultáneamente. Finalmente debe decirse con respecto a la fisuración que en los equipos de auscultación más avanzados ya es el propio ordenador de a bordo quien, a partir de la imagen digitalizada del video del pavimento, analiza el esquema de fisuración en dos dimensiones, y junto con las medidas de profundidad obtenidas como se ha dicho, proporciona al Ingeniero de Firms la información completa de fisuración del carril. El autor puede proporcionar al amable lector interesado información adicional sobre el tema.

Obsérvese en la *Figura 4* adjunta que para la representación gráfica se divide cada carril sólo en dos mitades, que se asocian a cada una de las dos rodadas. Una mayor división del carril haría el gráfico más confuso que útil.

Del conjunto de parámetros así obtenidos puede obtenerse un "In-

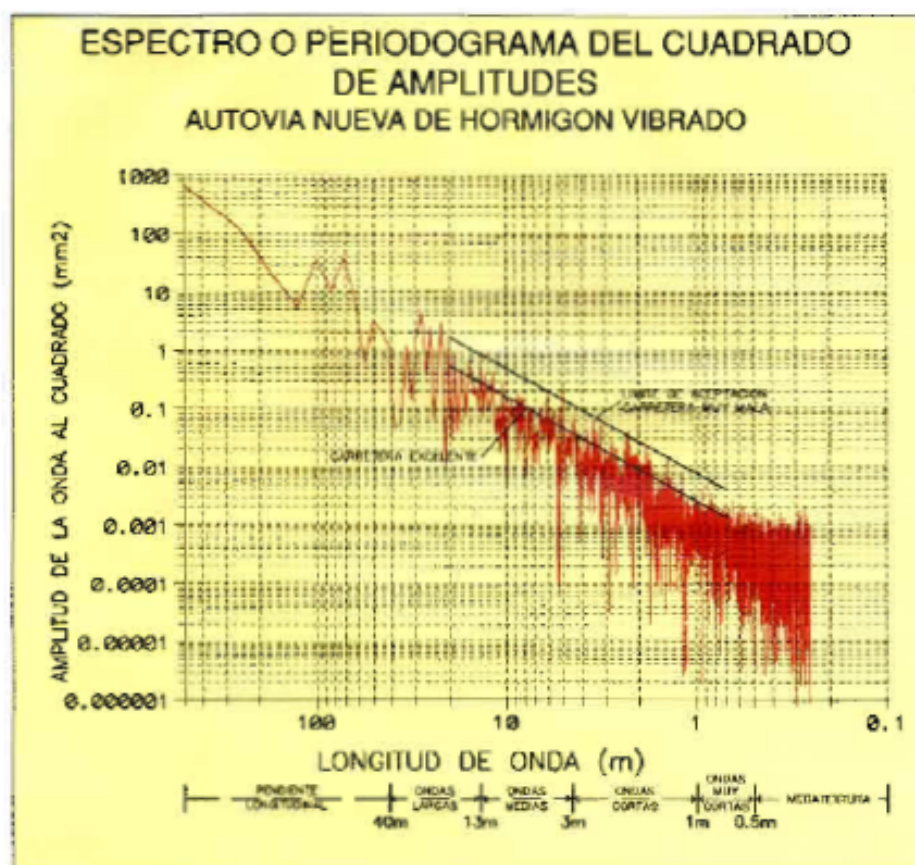


Figura 7. Espectro o periodograma de amplitudes, pero dibujando la amplitud al cuadrado en lugar de amplitud. La norma alemana VDI-Richtlinie 2057 propone rectas como las de la figura para evaluar la calidad en una banda determinada. (Naturalmente son indicativas).

dice de Estado" del carril, que suele representarse en la parte superior del gráfico. El estudio de los Índices de Estado es toda una rama dentro de la Ingeniería de Firms, y tampoco se describe en el presente artículo. Baste decir que, dependiendo de las necesidades específicas de cada usuario, puede

representarse un Índice Funcional o un Índice Estructural, o uno que refleje ambas características y que ayude al responsable de Conservación a establecer sus estrategias y prioridades. Naturalmente, todos los datos pueden y deben entrar en la base de datos adecuada para ser utilizados en los Modelos de Ges-

ción de Firmes (PMS, Pavement Management Systems) del usuario.

13. Ejemplo real de Autovías españolas.

En la Figura 5 se presentan los "espectros" de dos tramos, situados en calzadas distintas y separados 50 km, de una Autovía de hormigón vibrado. La descomposición de Fourier TDF se ha obtenido con la rutina descrita en el presente artículo. La muestra tomada es de 24 000 puntos (3 km de autovía), y el gráfico corresponde a 500 metros (4 000 puntos). En abscisas se representan las longitudes de onda componentes, en metros, y en ordenadas se representa la amplitud de cada onda componente, en mms. En el gráfico se dibujan dos periodogramas de amplitudes, azul y rojo, correspondientes uno a cada tramo. Puede observarse lo siguiente:

- Como se han analizado 4 000 puntos del perfil longitudinal, se obtienen 2 000 sinusoides componentes.

- Como el intervalo de muestreo es 12,5 cm, no se obtienen longitudes de onda menores que 25 cm. Como se han tomado 4 000 puntos a esa distancia, no se obtienen longitudes de onda mayores que $4\,000 \div 0,125 = 500$ m.

- En las longitudes de onda mayores, las amplitudes son muy grandes. Esto se debe a que la TDF interpreta la pendiente de la carretera como una componente sinusoidal de muy larga longitud de onda. Por estar la banda de longitudes de onda limitada por arriba por la superior de Nyquist (500 m en este caso), lleva todas las amplitudes a esta longitud de onda y sus más próximas.

- Se aprecia perfectamente una amplitud relativa muy grande en 5 m de longitud de onda, que se debe a las juntas cortadas que pueden observarse en la fotografía. Se obtienen amplitudes relativas muy grandes también en sus primeros armónicos, 10, 20 y 30 m.

- Aparecen amplitudes muy pequeñas repartidas "aleatoria-

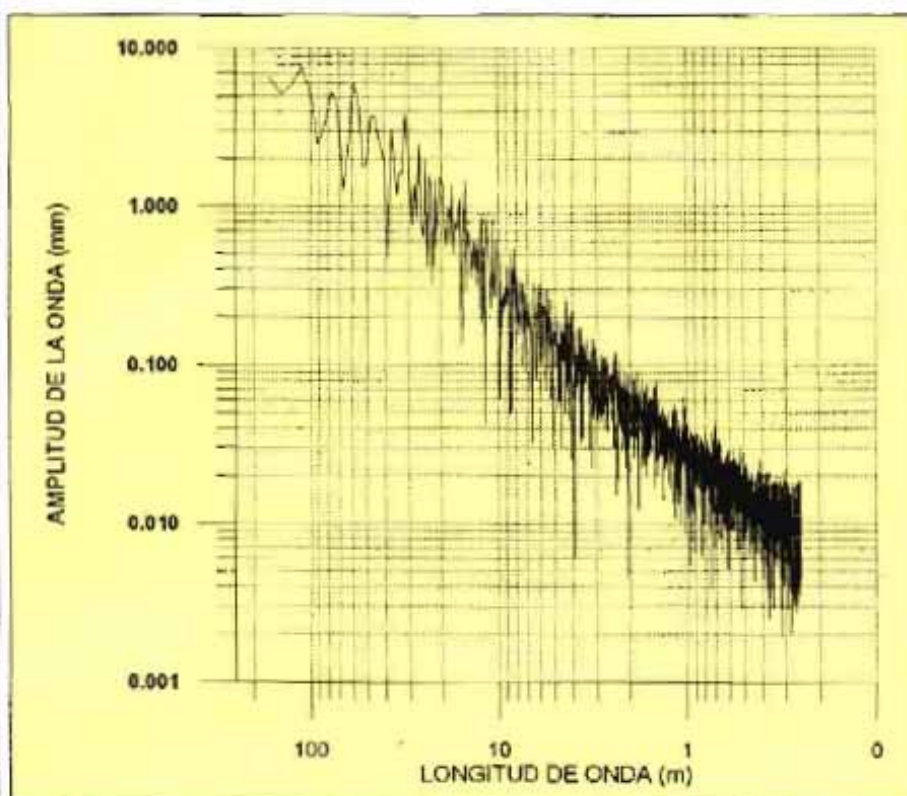


Figura 8. Autovía N-III y su espectro de amplitudes. Excelente terminación y acabado. IRI menor de 1,5 en el tramo analizado.

mente". La interpretación del autor, que se deja abierta a discusión, es que para reproducir el perfil formado por los 4 000 puntos analizados, estas longitudes de onda no intervienen casi nada, al contrario que las longitudes de 5 y 10 m. Para reproducir adecuadamente el perfil, estas últimas deben tener amplitudes muy grandes.

- Aparecen amplitudes relativas grandes en la banda de 2 a 3 m.

Como estas longitudes de onda son muy acusadas por el IRI, el IRI de este tramo debe ser muy malo. Efectivamente, el IRI medido supera a 3 en varias zonas y llega a 3,5 en un hectómetro, y el conductor nota perfectamente las desagradables vibraciones que dichas irregularidades originan al conducir sobre el tramo.

- Las amplitudes correspondientes a las longitudes de onda

“

E

l análisis de Fourier permite saber cuáles son las irregularidades más importantes, pero no indica dónde están.”

menores aumentan al ir disminuyendo la longitud de onda. El fenómeno puede verse en la banda de 10,0 a 0,25 m. Las amplitudes van descendiendo según una línea prácticamente recta, pero al final aumentan. La interpretación del autor es que este aumento se debe al fenómeno del "aliasing", que hace que amplitudes correspondientes a longitudes menores de 0,25 m se solapen en las mayores, causando este cambio de tendencia.

— Si se suman las 2 000 sinusoides obtenidas con la rutina del presente artículo, cada una con sus correspondientes longitud de onda, amplitud y fase, se obtienen de nuevo los 4 000 puntos del perfil longitudinal exacto del tramo de carretera analizado. El autor puede poner a disposición del lector interesado los datos correspondientes.

La Figura 6 presenta los periodogramas de amplitudes de dos tramos de autovía, uno de hormigón vibrado y otro de mezcla bituminosa, carril derecho, rodada derecha.

Finalmente, la Figura 7 presenta el mismo periodograma del tramo de hormigón vibrado pero dibujando, en lugar de las amplitudes, su cuadrado. Este es el gráfico que muchos lectores estarán acostumbrados a ver en diversas publicaciones sobre el tema, aunque en todos los casos las ordenadas están dibujadas en las unidades comentadas más arriba (dB, m³/c, autoespectro, etc.). En algunas Normas alemanas se han hecho intentos, aún sin fructificar, de evaluar la calidad de la carretera según esté situado el gráfico en re-

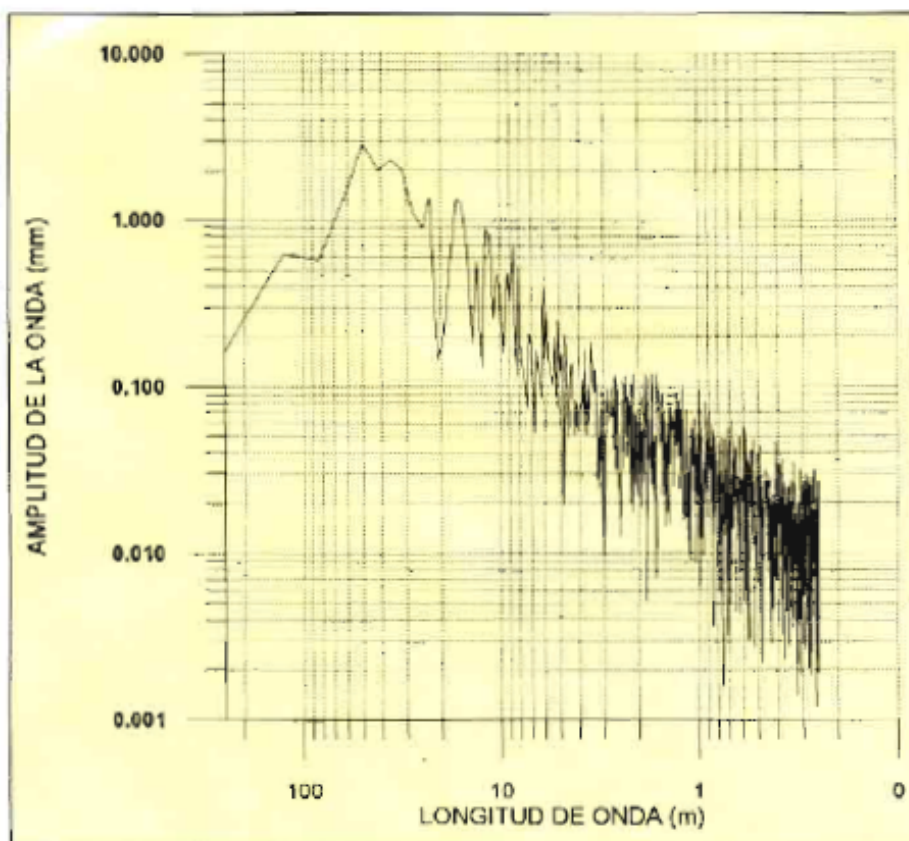


Figura 9. Autopista A-2. Excelente terminación y acabado. IRI menor que 1.

lación a una banda de aceptación, como se indica en la figura 7. En un próximo artículo se profundizará más sobre este tema aunque el autor ya puede adelantar que le parece necesario filtrar (eliminar) las ondas largas antes de que un análisis de este tipo puede aplicarse.

Para terminar, debe decirse que parece mucho más claro representar las amplitudes que su cuadrado.

El ingeniero de la Empresa constructora que a pie de obra está terminando sus capas de firme, o el Ingeniero Director responsable de dichas obras, o el Jefe de la Demarcación correspondiente, o el simple ingeniero de a pie como el autor, que no tienen tiempo en muchos casos de rehusar por la literatura, no deben ser confundidos con "densidades espectrales de

energía de la carretera", "autoespectros" o "decibelios". Como siempre, las cosas que parecen confusas suelen resultar en cosas muy sencillas pero mal explicadas.

Si el lector olvida por un momento que tanto la TDF como la FFT dan sólo una serie discreta de valores de amplitudes y que los gráficos del presente artículo representan 2 000 amplitudes, podría suponer que se tratara de curvas continuas. Podría hablarse en este caso de que la ordenada fuera una "densidad de amplitudes". Aún así, de ahí a pasar a hablar de "densidad de energía de la carretera" parece un gran salto en el vacío. Repetimos que en electricidad ocurre que el cuadrado de la intensidad es la energía absorbida por un ohmio en un segundo. Como las aplicaciones de la TDF en Ingeniería civil realmente vienen de la Ingeniería industrial o de Telecomunicación, tal vez de ahí viene el hablar de energía de un perfil longitudinal.

Para terminar, digamos que el análisis de Fourier permite saber al ingeniero de firmes cuáles son las irregularidades más importantes, pero no indica dónde están esos defectos en el tramo analizado, lo que es fundamental para la corrección del pavimento. El autor cree que los estudios que se están realizando actualmente con otros tipos de funciones ortogonales (por ejemplo, la Transformada de Wavelet) permitirá obtener además información sobre la localización de las irregularidades con respecto al origen del tramo analizado.

Bibliografía

1. "Cálculo del IRI a partir del perfil longitudinal de una carretera". Rutas, nº Mayo-Junio 92. Manuel J. Melis.
2. "Fourier series and harmonic analysis". Stanley Thorne, K.A. Stroud, 1984.
3. "Fourier Analysis", Simon & Schuster, Hwei P. Hsu, 1970.
4. "Numerical recipes in C", Cambridge Univ. Press, William H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky y W.T. Vetterling, 1988, 1991.
5. "Fourier analysis", Simon & Schuster, Hwei P. Hsu, 1970.
6. "The fast wavelet transform",



Según se ha ido desarrollando el Plan General de Carreteras se fue mejorando sin duda y constantemente la calidad de las obras.

- Mac A. Cody, DDJ Journal, Abril 1992.
7. "Simulación de la reparación de la regularidad superficial de una carretera. Programas de la regla de 3 m y del viágrafo". Manuel J. Melis, Rutas Nov-Dic 92.
8. "Rutinas en C para cálculo y dibujo de áreas y volúmenes de obras de tierras, Tomo IV", Manuel J. Melis, Software Técnico, 1992.
9. "Sistemas digitales y analógicos. Transformadas de Fourier y estimación espectral", Athanasios Papoulis, Boixareu Ed., 1978.
10. "Problems encountered in using elevation power spectra as criteria of pavement condition", B.E. Quinn & K. Hagen, 1968.
11. "Apuntes sobre series temporales", Francisco Melis M, I.N.E. 1986. Documento de trabajo.
12. "Regularidad superficial de los pavimentos extendidos mecánicamente", V. Sánchez Blanco, L.T. y M.S. 1969.
13. "La estimación del ritmo de variación en series económicas", Francisco Melis, "Estadística Española", Vol. 33, Nº 126, 1991.
14. "Signal processing in C", Reid & Passin, Wiley, 1992.
15. "Sobre la hipótesis de componentes y la extracción de la señal de coyuntura sin previa desestacionalización", Francisco Melis, "Revista Española de Economía", Vol. 6, Nº 1 y 2, 1989.