Un modelo de las máximas prestaciones de un vehículo

SANDRO ROCCI
DR. INGENIERO DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

1. Introducción

Los aficionados al trazado de las carreteras han recibido con satisfacción la aparición del texto de la Norma **3.1-IC,** fechado en diciembre de 1996 que, de acuerdo con la nota de servicio de abril de 1997 de la Dirección General de Carreteras del Ministerio de Fomento, debe ser tenida en cuenta en la redacción de los proyectos de las carreteras de ella dependientes.

En la parte de la Norma dedicada a los carriles de cambio de velocidad, para determinar la longitud de los de aceleración, aparece una cabalística fórmula cuya aplicación facilitan, a Dios gracias, unas tablas. Mucho me temo que soy yo el autor de la tal formuleja, la cual quedó reflejada en unos borradores de la citada Norma que dejé terminados en 1991, cuando yo era responsable de su desarrollo; pero nunca he contado de dónde salía. Agradezco a la Comisión redactora de la Norma la deferencia que ha tenido con mi criatura al haberla mantenido en el texto de diciembre de 1996.

En este trabajo me propongo subsanar esa omisión, explicando con detalle la génesis y desarrollo de la fórmula; lo cual permitirá a los lectores comprenderla mejor y aportar variaciones como, por ejemplo, otros valores de los parámetros que sean de aplicación a algún caso concreto.

2. El máximo empuje disponible

En un artículo escrito hace más de veinte años[1], y que estaba relacionado con el mundo de la competición automovilista, desarrollé un modelo matemático simplificado para el movimiento de un vehículo ideal en unas condiciones de máximas prestaciones, es decir, desarrollando en todo momento su máxima potencia. Dicho modelo relacionaba el empuje **f**

1) *"Estudio de la prestaciones de un vehículo de competición".- Revista de Obras Públicas, enero de 1976, pp. 39-44.*

disponible para vencer el efecto adverso de las rampas y para acelerar el vehículo con la velocidad **v**, y era de tipo hiperbólico:

$$(v - p)\cdot(f - q) = k$$

donde **p, q** y **k** eran unas constantes propias del vehículo. Haciendo intervenir la máxima velocidad $v_{máx}$ alcanzable por el vehículo en una rasante horizontal (para la que, evidentemente, era **f** = 0) y el empuje máximo f_0 en el arranque (cuando **v** = 0), se demostraba que el modelo adoptaba la forma:

$$1-\frac{f}{f_0}=\frac{v/v_{máx}}{1-B\cdot(1-v/v_{máx})}$$

siendo:

$$B=\frac{v_{máx}\cdot f_0}{2.k}\cdot\left[\sqrt{1+\frac{2}{\frac{v_{máx}\cdot f_0}{2\cdot k}}}-1\right]$$

Si se utiliza la notación

$$b=1-v/v_{máx}$$

la fórmula anterior queda así:

$$\frac{f}{f_0}=\frac{(1-B)\cdot b}{1-B\cdot b}$$

3. Relaciones entre el tiempo y la velocidad

3.1. Planteamiento

Se parte de la ecuación diferencial que define la aceleración de un móvil de peso **P** en una rasante inclinada, sometido a un empuje **f**:

$$\frac{dv}{dt}=(\frac{f}{P}-i)\cdot g$$

en la que son:

- **t** el tiempo,
- **P** el peso del vehículo,
- **i** la inclinación de la rasante (en tanto por uno),
- **g** la aceleración de la gravedad.

Sustituyendo en esta ecuación diferencial la expresión que se ha hallado en el apartado anterior para el empuje en función de la velocidad, en un régimen de prestaciones máximas, se obtiene la expresión de la aceleración para dicho régimen:

$$\frac{dv}{dt}=-v_{máx}\cdot\frac{db}{dt}=\left[\frac{f_0}{P}\cdot\frac{(1-B).b}{1-B.b}-i\right]\cdot g$$

3.2. Máxima velocidad compatible con una inclinación de la rasante

Una primera consecuencia de esta ecuación es la determinación de la máxima velocidad del móvil, compatible con una determinada inclinación de la rasante. Para que la velocidad no crezca más, ha de ser

$$\frac{dv}{dt}=0$$

con lo que la máxima velocidad compatible con una inclinación **i** de la rasante está dada por:

$$\frac{v_{máx}(i)}{v_{máx}(0)}=1-\frac{1}{B+\frac{f_0}{P}\cdot\frac{1-B}{i}}$$

3.3. Integración para una rasante horizontal

Si **i** = 0, la ecuación diferencial queda:

$$-v_{máx}\cdot\frac{db}{dt}=\frac{f_0\cdot g}{P}\cdot\frac{(1-B).b}{1-B.b}$$

y, definiendo un nuevo parámetro propio del vehículo

$$A=\frac{f_0\cdot g}{P}$$

e integrando, resulta:

$$t=-\frac{v_{máx}}{A\cdot(1-B)}\cdot[B\cdot(1-b)+\ln b]$$

3.4. Integración para una rasante no horizontal

Se define un parámetro auxiliar, propio del vehículo y de la inclinación de la rasante:

$$b_0=\frac{\frac{i\cdot g}{A}}{1-B\cdot(1-\frac{i\cdot g}{A})}$$

La ecuación diferencial queda, entonces, así:

$$\frac{A}{v_{máx}}\cdot dt=-\frac{db}{\frac{(1-B)\cdot b}{1-B\cdot b}-\frac{i\cdot P}{f_0}}=$$

$$=-\frac{1-B\cdot b}{(1-B)\cdot b-\frac{i\cdot g}{A}\cdot(1-B\cdot b)}\cdot db=$$

$$=-\frac{1-B\cdot b}{\frac{i\cdot g}{A}\cdot(\frac{b}{b_0}-1)}\cdot db$$

Integrando, resulta:

$$t=-\frac{b_0\cdot v_{máx}}{i\cdot g}\times$$

$$\times\left[B\cdot(1-b)+(1-B\cdot b_0)\cdot\ln\frac{b-b_0}{1-b_0}\right]$$

4. Relaciones entre la velocidad y el camino recorrido

4.1. Planteamiento

La ecuación diferencial de la aceleración en un régimen de máximas prestaciones se puede expresar en función de **s**, el camino recorrido, en lugar del tiempo **t**, sin más que recordar que, por definición, es:

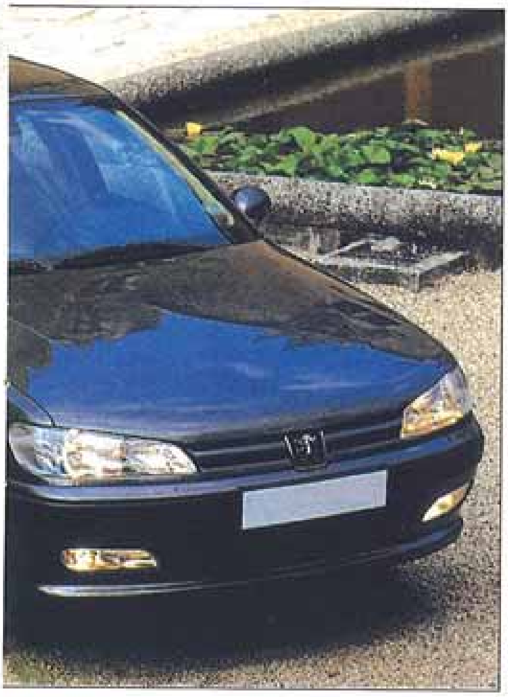
$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=v\cdot\frac{dv}{ds}=$$

$$=-v_{máx}^2\cdot(1-b)\cdot\frac{db}{ds}$$

con lo que queda:

$$(1-b)\cdot\frac{db}{ds}+\frac{g}{v_{máx}^2}\times$$

$$\times\left[\frac{f_0}{P}\cdot(1-B)\cdot\frac{b}{1-B\cdot b}-i\right]=0$$



4.2. Integración para una rasante horizontal

Si $i = 0$, la ecuación diferencial queda así:

$$\frac{A\cdot(1-B)}{v_{máx}^2}ds=$$

$$=-\frac{(1-b)\cdot(1-B\cdot b)}{b}db$$

Integrando, queda:

$$s=\frac{v_{máx}^2}{A\cdot(1-B)}\times$$

$$\times\left[(1+B)\cdot b-\ln b-B\cdot\frac{b^2}{2}-(1+\frac{B}{2})\right]=$$

$$=-\frac{v_{máx}^2}{A\cdot(1-B)}\times$$

$$\times\left\{(1-b)\cdot\left[1+\frac{B}{2}\cdot(1-b)\right]+\ln b\right\}$$

4.3. Integración para una rasante no horizontal

La ecuación diferencial se transforma así:

$$\frac{i\cdot g}{b_0\cdot v_{máx}^2}\cdot ds=\left\{\left[B\cdot(1-b_0)+\right.\right.$$

$$\left.+(1-B\cdot b_0)\right]+B\cdot(b-b_0)-$$

$$\left.-\frac{(1-b_0)\cdot(1-B\cdot b_0)}{b-b_0}\right\}\cdot d(b-b_0)$$

Integrando, queda:

$$s=-\frac{b_0.v_{máx}^2}{i\cdot g}\cdot\left\{\left[1+B\cdot\left\{(1-b_0)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1+b}{2}\right\}\right]\cdot(1-b)+(1-b_0)\times$$

$$\left.\times(1-B\cdot b_0)\cdot\ln\frac{b-b_0}{1-b_0}\right\}$$

5. Determinación de los parámetros propios de un vehículo

En muchas revistas especializadas se pueden encontrar datos relativos a las prestaciones máximas de un vehículo, normalmente referidas a una rasante horizontal. Así, por ejemplo:

- Su velocidad máxima $V_{máx}$ (km/h) = $3{,}6\cdot v_{máx}$.
- El tiempo t_1 (s) para acelerar de 0 a 100 km/h.
- El tiempo t_2 (s) necesario para recorrer 400 m a partir del reposo.
- El tiempo t_3 (s) necesario para recorrer 1 000 m a partir del reposo.

De los cuatro parámetros citados, se necesita conocer tres: normalmente los dos primeros, y uno solo de los otros dos. Utilizando las ecuaciones derivadas para una rasante horizontal, se definen unas variables auxiliares:

$$x=-\frac{t_3}{t_1}\ ;\ y=-\frac{3600}{V_{máx}\cdot t_3}$$

La incógnita b_3 se obtiene resolviendo la ecuación trascendente:

$$\frac{(1-b_1)\cdot x-(1-b_3)}{(1-b_3)\cdot(y-\frac{1-b_3}{2})}=$$

$$=\frac{\ln b_3-x\cdot\ln b_1}{(1-b_3)+(1-y)\cdot\ln b_3}$$

y, a partir de ella, los parámetros **A** y **B** del vehículo:

$$A=-\frac{V_{máx}}{3{,}6\cdot t_1}\cdot\frac{B\cdot(1-b_1)+\ln b_1}{1-B}$$

$$B=\frac{\ln b_3-x\cdot\ln b_1}{(1-b_1)\cdot x-(1-b_3)}$$

6. Ejemplo

Se han considerado las prestaciones de un coche patrón[2], de 100 CV de potencia y $V_{máx}$ = 180,2 km/h:

- t_1 de 0 a 100 km/h = 11,0 s;
- t_2 para recorrer 400 m desde el reposo: 17,8 s;
- t_3 para recorrer 1 000 m desde el reposo: 33,0 s.

La velocidad alcanzada, después de recorrer 1 000 m a partir del reposo, en una rasante horizontal y con un régimen de prestaciones máximas, es V_3 = 153,9 km/h.

Los parámetros del vehículo son **A** = 5,605 ; **B** = 0,623 8. Se puede observar que, con el valor de **A** obtenido, el máximo empuje f_0 equivale al 57,1 % del peso del vehículo: lo cual corresponde a que, durante un arranque en régimen de máximas prestaciones, se moviliza un rozamiento longitudinal posible, aunque elevado, entre las ruedas del vehículo y el pavimento.

Para comprobar el modelo, se ha calculado, basándose en él, cuánto tiempo se tarda en recorrer 400 m; y se ha comparado el

2) *"Este vehículo ha sido el Seat Ibiza Sxi.*

resultado de este cálculo (17,73 s) con el tiempo publicado (17,8 s): la coincidencia es casi exacta.

El modelo aparece en la parte de la Norma 3.1 - IC, dedicada a los carriles de cambio de velocidad, para determinar la longitud de los de aceleración

7. Aplicación a otros vehículos

A partir de los datos publicados para otros modelos de vehículo, se ha confeccionado la *tabla 1*, en la que se incluyen además los parámetros **A** y **B** calculados de forma análoga a la expuesta para el vehículo patrón.

Se puede observar que, mientras el coeficiente **B** varía poco (entre 0,5 y 0,6) con el tipo de vehículo, el coeficiente **A** muestra una correlación muy buena con el cuadrado de la velocidad máxima $\mathbf{V_{máx}}$, siendo aproximadamente:

$$A \cong \left(\frac{V_{\text{máx}}}{79}\right)^2$$

8. Resumen del modelo

Simplificando las ecuaciones obtenidas en los apartados anteriores, se puede comprobar que, para el vehículo patrón, las relaciones de la velocidad **V** (km/h) con el tiempo transcurrido **t** (s) y el camino recorrido **s** (m), en ambos casos desde el reposo, son las siguientes:

Rasante horizontal:

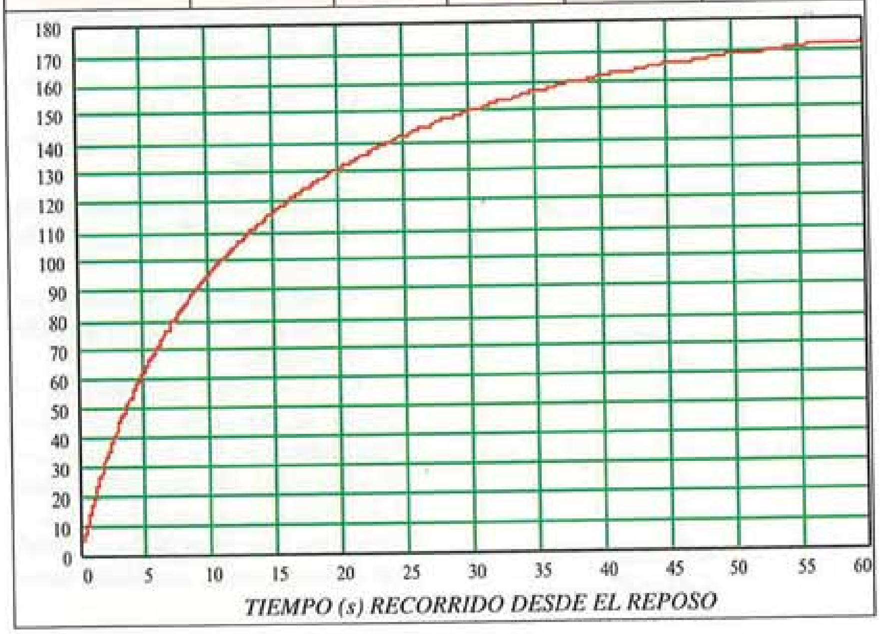
$$t = -23{,}74 \cdot \ln\left(1 - \frac{V}{180}\right) - \frac{V}{12{,}17}$$

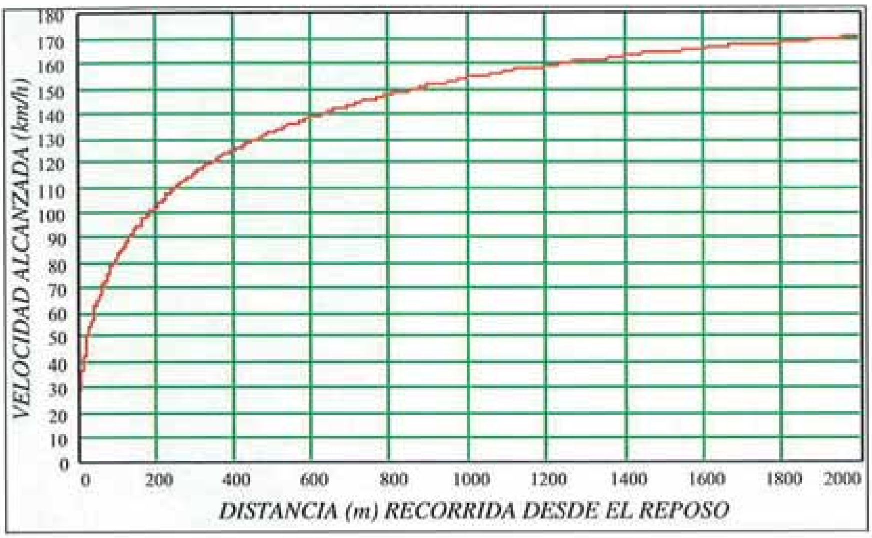
$$s = -1188 \cdot \ln\left(1 - \frac{V}{180}\right) - 6{,}594 \cdot V \cdot \left(1 + \frac{V}{577{,}75}\right)$$

TABLA 1

Características de algunos vehículos ligeros

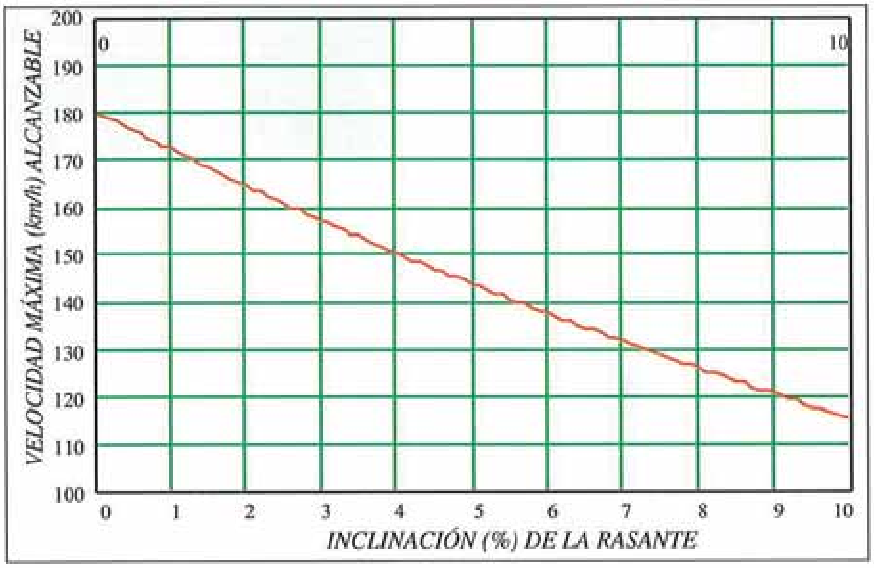
POTENCIA (CV)	$V_{máx}$ (km/h)	t_{400} (s)	t_{1000} (s)	A	B
50	138,1	21,0	39,8	3,055	0,6289
100	180,2	17,8	33,0	5,605	0,6238
157	218,8	15,8	28,7	7,740	0,4837
192	230,7	15,5	28,3	8,525	0,5938
270	259,6	14,4	26,2	10,795	0,6237





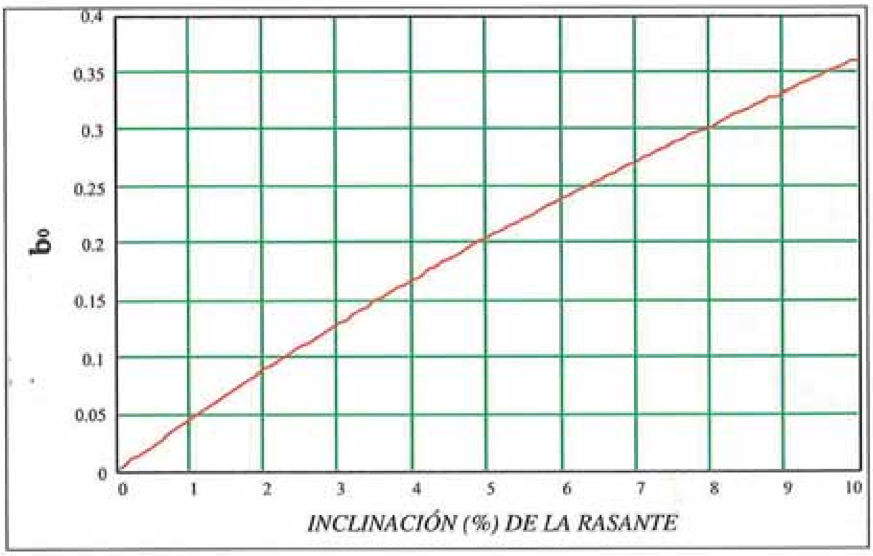
Rasante no horizontal:
Velocidad máxima según la inclinación **i** (%) de una rampa:

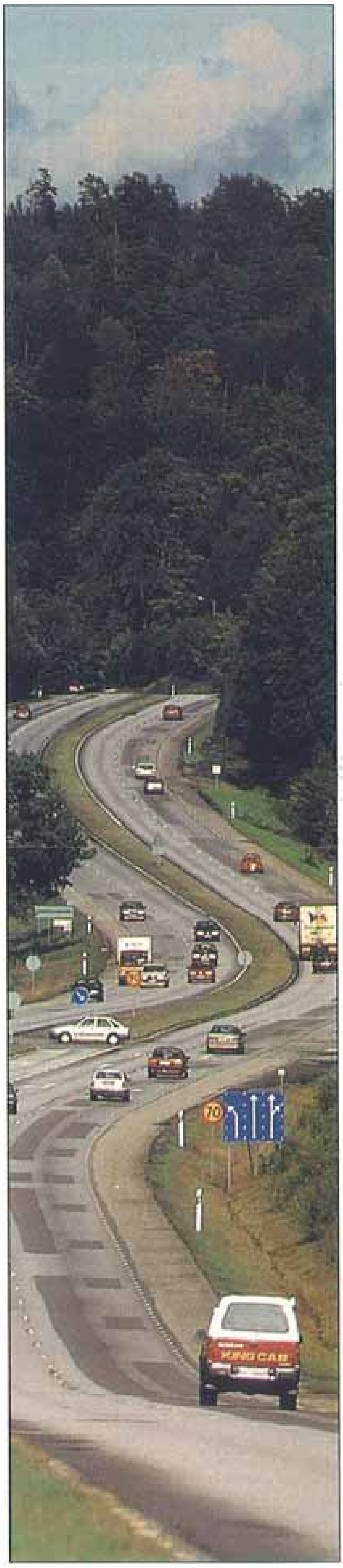
$$V_{\text{máx}} = 180 \cdot \frac{21{,}49 - 0{,}3762 \cdot i}{21{,}49 + 0{,}6238 \cdot i}$$

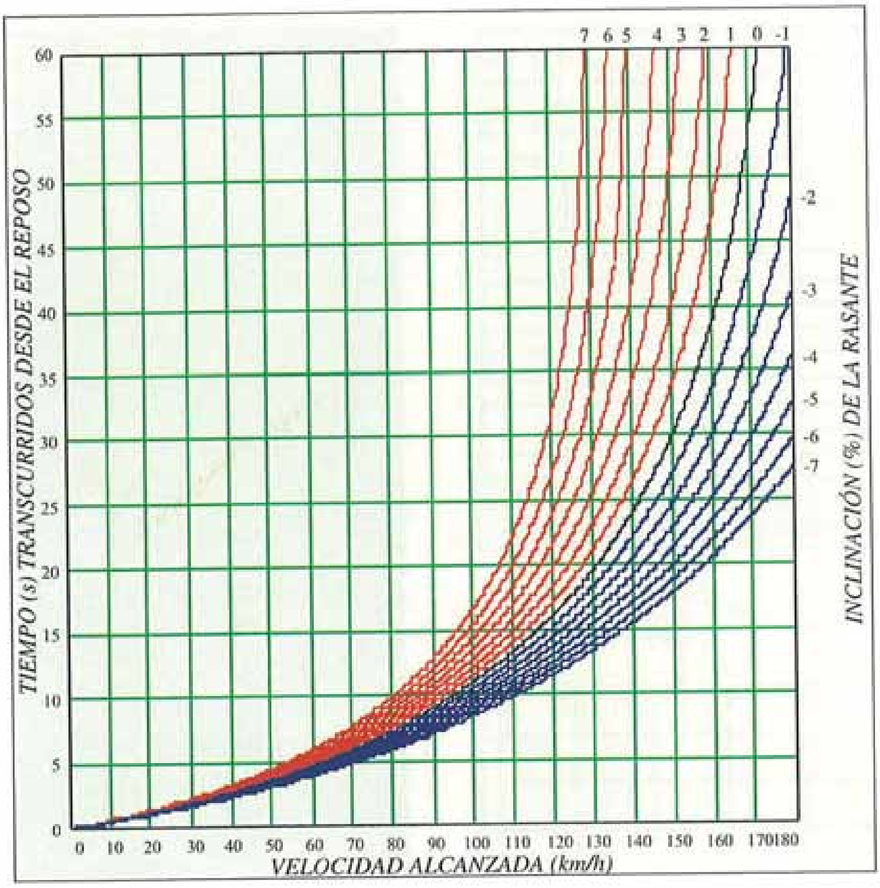


Parámetro $\mathbf{b_0}$:

$$b_0 = \frac{i}{21{,}494 + 0{,}6238 \cdot i}$$





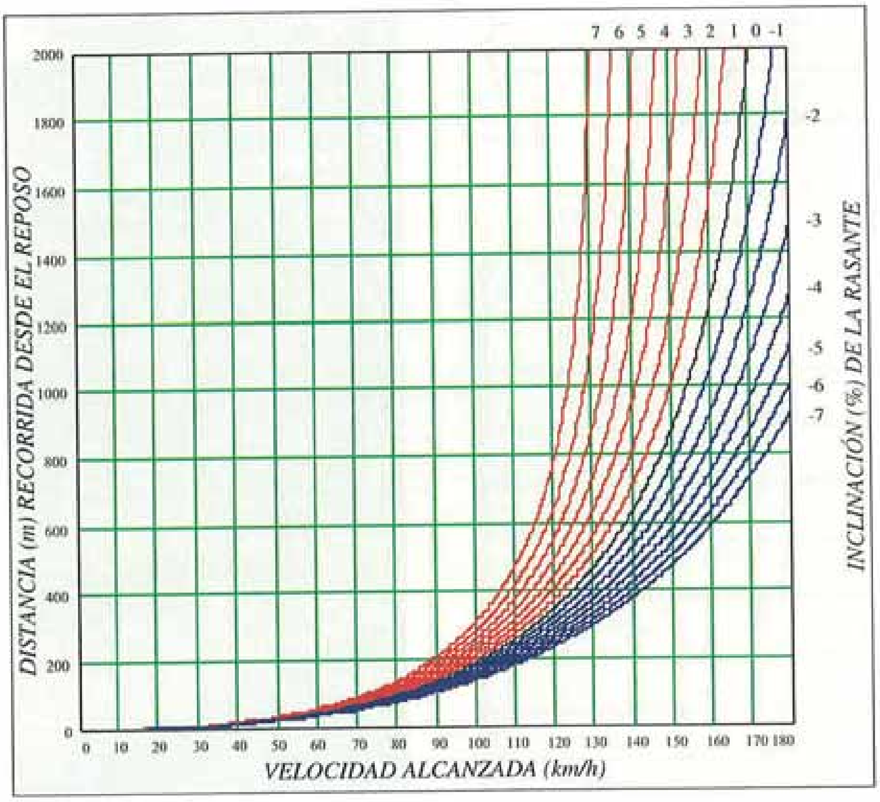


$$t(i) = -\frac{23{,}74}{(1+\frac{i}{34{,}457})^2}\cdot \ln\left[1-\frac{1+\frac{i}{34{,}457}}{1-\frac{i}{57{,}135}}\cdot\frac{V}{180}\right]-\frac{\frac{V}{12{,}17}}{1+\frac{i}{34{,}457}}$$

$$s(i) = -\frac{1188\cdot(1-\frac{i}{57{,}135})}{\left[1+\frac{i}{34{,}457}\right]^3}\times$$

$$\times\ln\left[1-\frac{1+\frac{i}{34{,}457}}{1-\frac{i}{57{,}135}}\cdot\frac{V}{180}\right]-$$

$$-\frac{6{,}594\cdot V}{1+\frac{i}{34{,}457}}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{i}{34{,}457}}+\frac{V}{577{,}75}\right]$$



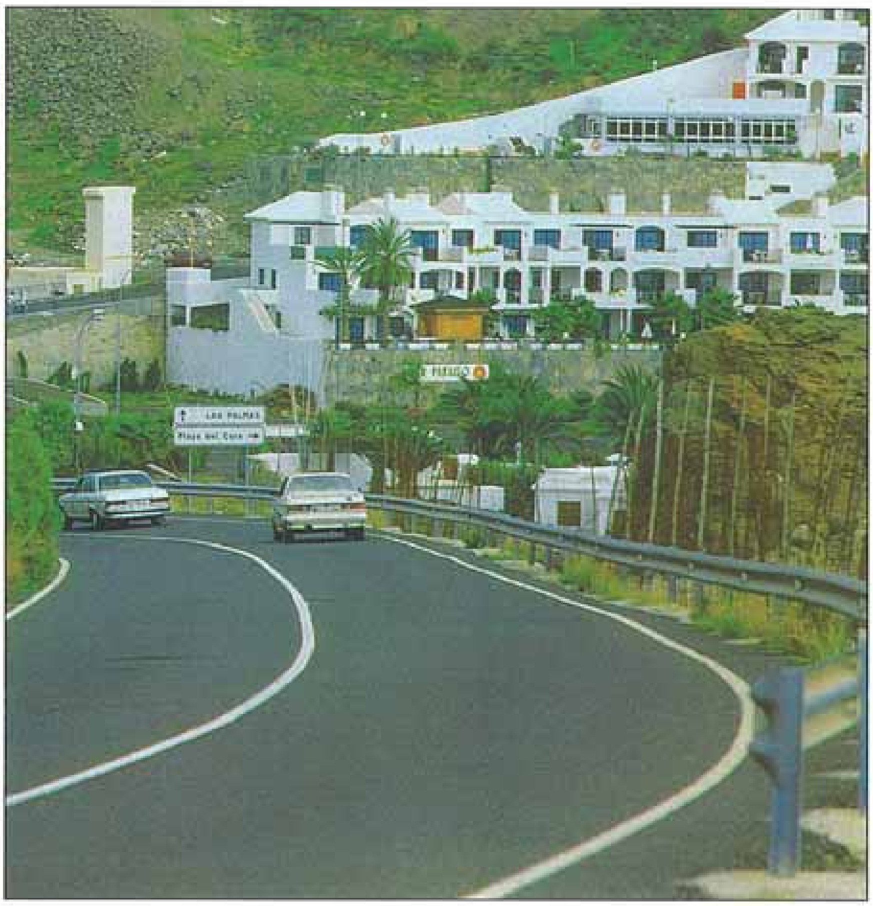
Esta fórmula tiene la misma estructura que la contenida en la Norma **3.1-IC** (1997), aunque hay ciertas diferencias en las constantes:

1188	en vez de 1102.
1/57,135 = 1,75/100	en vez de 2/100.
1/34,457 = 2,90/100	en vez de 2,65/100.
180	en vez de 175.
6,594	en vez de 6,4.
577,75/6,594 = 87,6	en vez de 96.

9. Las longitudes de los carriles de aceleración

Las ecuaciones y gráficos derivados en el apartado anterior, acerca de la relación entre el camino recorrido desde el reposo y la velocidad alcanzada en un régimen de máximas prestaciones por un vehículo patrón, resultan útiles para determinar la longitud **mínima** de un carril de aceleración, a partir de las velocidades inicial y final. Dicha longitud es igual a la diferencia de los caminos recorridos desde el reposo hasta alcanzar ambas velocidades. Naturalmente, se puede tener en cuenta la influencia de la inclinación de la rasante.

Realizada esta comprobación para las velocidades inicial y final, así como para las inclinaciones de la rasante que figuran en la Norma provisional **3.1-IC**[1], se obtiene la *tabla 2*: en la que entre paréntesis se indican los valores que figuran en la correspondiente tabla de la Norma.



Como se puede apreciar en la tabla, la aplicación de las fórmulas correspondientes al vehículo patrón proporcionan unas longitudes mínimas de aceleración algo inferiores a las de las tablas de la Norma **3.1-IC** (1997).

TABLA 2

LONGITUD (m) MÍNIMA DE LOS CARRILES DE ACELERACIÓN

Velocidades finales 60 Y 80 km/h

La longitud del carril de aceleración resulta inferior a 200 m, por lo que se aplica esta longitud mínima, igual que en la Norma.

Velocidad final 100 km/h

i (%)	VELOCIDAD INICIAL (km/h) 0	10	20	30	40	50	60
-7 a -1	200 (mínimo)						
0	200 (205)	200 (204)	200 (201)	200 (mínimo)			
1	200 (217)	200 (216)	200 (213)	200 (208)	200 (mínimo)		
2	211 (232)	210 (231)	207 (228)	202 (222)	200 (212)	200 (mínimo)	
3	224 (248)	224 (247)	221 (244)	215 (238)	207 (228)	200 (214)	200 (200)
4	240 (267)	239 (266)	236 (263)	231 (247)	222 (247)	208 (232)	200 (210)
5	258 (290)	257 (289)	255 (286)	249 (279)	240 (269)	226 (253)	205 (231)
6	280 (318)	279 (317)	276 (314)	270 (307)	261 (296)	246 (280)	225 (256)
7	306 (353)	305 (352)	302 (348)	296 (341)	286 (330)	271 (313)	249 (288)

(Continúa)

10. Conclusión

En este trabajo se ha desarrollado un modelo matemático de las máximas prestaciones de un vehículo cualquiera, cuyos parámetros se pueden particularizar a partir de datos publicados en las revistas especializadas. Se han determinado los correspondientes a diversos vehículos y, basándose en los de un vehículo patrón, se han calculado las longitudes de aceleración para las velocidades que figuran en la tabla 7.5 de la Norma **3.1-IC** (diciembre de 1996): resultando dichas longitudes coherentes con

[1] *Texto de diciembre de 1996, que debe ser tenido en cuenta según nota de servicio de la Dirección General de Carreteras de abril de 1997.*

las que figuran en la citada tabla, aunque un poco menores.

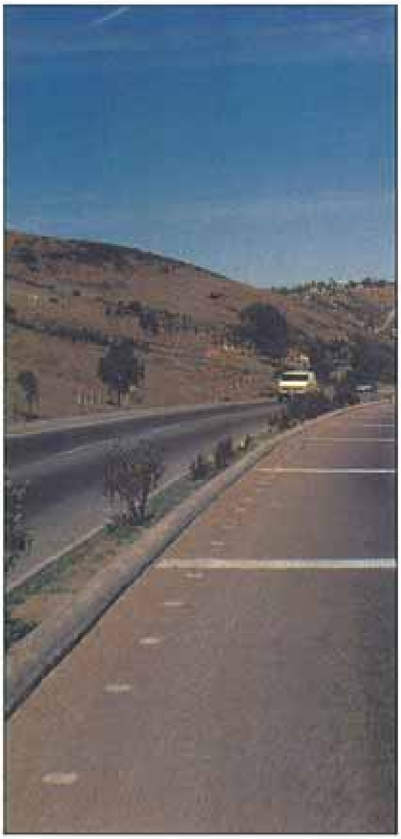


TABLA 2 (continuación)

Velocidad final 120 km/h

i (%)	VELOCIDAD INICIAL (km/h) 0	10	20	30	40	50	60
-6	246 (261)	245 (261)	243 (258)	239 (253)	232 (246)	222 (235)	209 (221)
-5	258 (275)	257 (274)	255 (272)	251 (267)	244 (259)	234 (249)	220 (234)
-4	272 (291)	270 (290)	269 (287)	264 (282)	257 (275)	247 (263)	233 (248)
-3	287 (308)	286 (307)	284 (305)	279 (300)	272 (292)	261 (280)	247 (264)
-2	304 (328)	304 (327)	301 (325)	297 (319)	289 (311)	278 (299)	263 (283)
-1	324 (351)	324 (351)	321 (348)	316 (342)	308 (334)	297 (321)	281 (304)
0	347 (378)	346 (377)	344 (375)	339 (369)	331 (360)	319 (348)	303 (330)
1	374 (410)	373 (410)	371 (407)	365 (401)	357 (392)	345 (379)	328 (360)
2	406 (449)	405 (449)	402 (446)	397 (440)	389 (430)	376 (417)	358 (397)
3	445 (498)	444 (497)	441 (494)	436 (488)	427 (478)	414 (464)	396 (444)
4	494 (561)	493 (560)	490 (557)	484 (551)	475 (541)	462 (526)	442 (504)
5	557 (647)	556 (647)	553 (643)	547 (637)	538 (626)	524 (611)	504 (588)
6	645 (777)	644 (776)	641 (772)	635 (766)	626 (755)	612 (738)	590 (715)

— ANEXO —

1. Máxima velocidad compatible con una inclinación de la rasante

Para que

$$\frac{dv}{dt}=0$$

basta con que sea:

$$b=\frac{1}{B+\frac{f_0}{P}\cdot\frac{1-B}{i}}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{f_0}{P}\cdot\frac{(1-B).b}{1-B\cdot b}=i$$

con lo que la máxima velocidad compatible con una inclinación **i** de la rasante está dada por:

$$\frac{v_{máx}(i)}{v_{máx}(0)}=1-\frac{1}{B+\frac{f_0}{P}\cdot\frac{1-B}{i}}$$

2. Relaciones entre el tiempo y la velocidad

2.1. Integración para una rasante horizontal

Integrando la ecuación diferencial, resulta:

$$\frac{A.(1-B)}{v_{máx}}.t+C=-\int\frac{1-B.b}{b}.db=$$

$$=B.b-\ln b$$

Admitiendo que el vehículo se halla en reposo en instante inicial, será **b** = 1 para **t** = 0, y con ello se determina que la constante **C** de integración vale **B**. La ecuación que relaciona la velocidad alcanzada con el tiempo transcurrido desde el reposo es:

$$t=-\frac{v_{máx}}{A.(1-B)}.[B\cdot(1-b)+\ln b]$$

2.2. Integración para una rasante no horizontal

Integrando la ecuación diferencial, resulta:

$$\frac{A}{v_{máx}}\cdot t+C'=-\frac{A.b_0}{i.g}\left[\int\frac{db}{b-b_0}-B\cdot\int\frac{b}{b-b_0}\cdot db\right]=-\frac{A.b_0}{i.g}[\ln(b-b_0)-B.\{(b-b_0)+b_0.\ln(b-b_0)\}]$$

$$\frac{t}{v_{máx}}+C=-\frac{b_0}{i.g}\cdot[(1-B.b_0)\times\ln(b-b_0)-B\cdot(b-b_0)]$$

Admitiendo que el vehículo se halla en reposo en instante inicial, será **b** = 1 para **t** = 0, la constante **C** de integración vale:

$$C=-\frac{b_0}{i\cdot g}\cdot\{(1-B.b_0)\cdot\ln(1-b_0)-B\cdot(1-b_0)\}$$

y la ecuación que relaciona la velocidad alcanzada con el tiempo transcurrido desde el reposo, en un régimen de prestaciones máximas, es:

$$t=-\frac{b_0\cdot v_{\text{máx}}}{i\cdot g}\left[B\cdot(1-b)+\right.$$

$$\left.+(1-B\cdot b_0)\cdot\ln\frac{b-b_0}{1-b_0}\right]$$

3. Relaciones entre la velocidad y el camino recorrido

3.1. Integración para una rasante horizontal

Integrando ambos miembros de la ecuación diferencial:

$$A\cdot\frac{1-B}{v^2_{\text{máx}}}s+C=-\int\left[\frac{1-b}{b}-B.(1-b)\right]db=$$

$$=-\int\left[\frac{1}{b}-(1+B)+B.b\right]db=$$

$$=(1+B).b-\ln b-B\cdot\frac{b^2}{2}$$

Admitiendo que el vehículo se halla en reposo en el origen de las distancias, será **b** = 1 para **s** = 0, y la constante **C** de integración se obtiene como:

$$C=(1+B)-\frac{B}{2}=1+\frac{B}{2}$$

y la expresión del camino recorrido en función de la velocidad, en un régimen de máximas prestaciones, estará dada por:

$$s=\frac{v^2_{\text{máx}}}{A\cdot(1-B)}\cdot\left[(1+B)\cdot b-\ln b-\right.$$

$$\left.-B\cdot\frac{b^2}{2}-(1+\frac{B}{2})\right]=-\frac{v^2_{\text{máx}}}{A.(1-B)}\times$$

$$\times\left\{(1-b).\left[1+\frac{B}{2}.(1-b)\right]+\ln b\right\}$$

3.2. Integración para una rasante no horizontal

La ecuación diferencial

$$(1-b)\cdot\frac{db}{ds}=$$

$$=-\frac{A}{v^2_{\text{máx}}}\cdot\left[\frac{(1-B).b}{1-B.b}-\frac{i.g}{A}\right]$$

se transforma así:

$$\frac{A}{v^2_{\text{máx}}}\cdot ds=-\frac{1-b}{\dfrac{(1-B).b}{1-B.b}-\dfrac{i.g}{A}}\cdot db=$$

$$=-\frac{(1-b).(1-B.b)}{(1-B).b-\dfrac{i.g}{A}.(1-B.b)}\cdot db$$

$$\frac{A}{v^2_{\text{máx}}}\cdot ds=$$

$$=-\frac{(1-b).(1-B.b)}{\left[1-B.(1-\dfrac{i.g}{A})\right].b-\dfrac{i.g}{A}}\cdot db=$$

$$=-\frac{(1-b).(1-B.b)}{\left[1-B.(1-\dfrac{i.g}{A})\right].(b-b_0)}\cdot db=$$

$$=-\frac{(1-b).(1-B.b)}{\dfrac{i.g}{A}.\dfrac{b-b_0}{b_0}}\cdot db$$

$$\frac{ds}{v^2_{\text{máx}}}=-\frac{b_0}{i\cdot g}\cdot\frac{(1-b)\cdot(1-B\cdot b)}{b-b_0}\cdot db=$$

$$=-\frac{b_0}{i\cdot g}\times$$

$$\times\frac{[(1-b_0)-(b-b_0)]\cdot[(1-B\cdot b_0)-B\cdot(b-b_0)]}{b-b_0}\times$$

$$\times d(b-b_0)$$

$$\frac{i.g}{b_0\cdot v^2_{\text{máx}}}\cdot ds=\left\{[B\cdot(1-b_0)+\right.$$

$$+(1-B.b_0)]+B.(b-b_0)-$$

$$\left.-\frac{(1-b_0).(1-B.b_0)}{b-b_0}\right\}.d(b-b_0)$$

Integrando ambos términos:

$$\frac{i.g}{b_0\cdot v^2_{\text{máx}}}\cdot s+C=[1+B\cdot(1-2\cdot b_0)]\times$$

$$\times(b-b_0)-\frac{B}{2}\cdot(b-b_0)^2-(1-b_0)\times$$

$$\times(1-B.b_0)\cdot\ln(b-b_0)$$

Admitiendo que el vehículo se halla en reposo en el origen de las distancias, será **b** = 1 para **s** = 0, y la constante **C** de integración se obtiene como:

$$C=[1+B\cdot(1-2\cdot b_0)]\cdot(1-b_0)-$$

$$-\frac{B}{2}\cdot(1-b_0)^2-(1-b_0)\cdot(1-B\cdot b_0)\times$$

$$\times\ln(1-b_0)$$

La expresión del camino recorrido en función de la velocidad, en un régimen de máximas prestaciones, estará dada por:

$$s=-\frac{b_0.v^2_{\text{máx}}}{i.g}\cdot\left\{[1+B.(1-2.b_0)].\times\right.$$

$$\times(1-b)+B.\left[b_0-\frac{1+b}{2}\right]\times$$

$$\times(1-b)+(1-b_0)\cdot(1-B\cdot b_0)\times$$

$$\left.\times\ln\frac{b-b_0}{1-b_0}\right\}$$

$$s=-\frac{b_0.v^2_{\text{máx}}}{i\cdot g}\cdot\left\{\left[1+B\cdot\left\{(1-b_0)-\frac{1+b}{2}\right\}\right]\times\right.$$

$$\left.\times(1-b)+(1-b_0)\cdot(1-B\cdot b_0)\cdot\ln\frac{b-b_0}{1-b_0}\right\}$$

4. Determinación de los parámetros propios de un vehículo

Trabajando con el tiempo t_1 necesario para acelerar de 0 a 100 km/h, se tiene:

$$b_1 = 1 - \frac{100}{V_{máx}}$$

$$t_1 = -\frac{V_{máx}}{3{,}6 \cdot A \cdot (1-B)} \times$$

$$\times \left[B \cdot (1-b_1) + \ln b_1\right]$$

Trabajando con el tiempo t_3 necesario para recorrer 1 000 m desde el reposo, alcanzando una velocidad (*a priori* desconocida) V_3 (km/h), que da origen a la incógnita b_3:

$$t_3 = -\frac{V_{máx}}{3{,}6 \cdot A \cdot (1-B)} \times$$

$$\times \left[B \cdot (1-b_3) + \ln b_3\right]$$

$$1000 = -\frac{V^2_{máx}}{3{,}6^2 \cdot A \cdot (1-B)} \cdot \left\{(1-b_3) \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 + \frac{B}{2} \cdot (1-b_3)\right] + \ln b_3 \right\}$$

Se definen las variables auxiliares:

$$x = \frac{t_3}{t_1} = \frac{B \cdot (1-b_3) + \ln b_3}{B \cdot (1-b_1) + \ln b_1}$$

$$y = \frac{3600}{V_{máx} \cdot t_3} =$$

$$= \frac{(1-b_3) \cdot \left[1 + \frac{B}{2} \cdot (1-b_3)\right] + \ln b_3}{B \cdot (1-b_3) + \ln b_3}$$

Se elimina **B** entre estas dos ecuaciones:

$$\left[(1-b_1) \cdot x - (1-b_3)\right] \cdot B =$$

$$= \ln b_3 - x \cdot \ln b_1$$

$$(1-b_3) \cdot \left[y - \frac{1-b_3}{2}\right] \cdot B =$$

$$= (1-b_3) + (1-y) \cdot \ln b_3$$

La incógnita b_3 se obtiene resolviendo la ecuación trascendente:

$$\frac{(1-b_1) \cdot x - (1-b_3)}{(1-b_3) \cdot (y - \frac{1-b_3}{2})} =$$

$$= \frac{\ln b_3 - x \cdot \ln b_1}{(1-b_3) + (1-y) \cdot \ln b_3}$$

5. EJEMPLO

Con $V_{máx}$ = 180,2 km/h, y

- t_1 de 0 a 100 km/h = 11,0 s;
- t_2 para recorrer 400 m desde el reposo: 17,8 s;
- t_3 para recorrer 1 000 m desde el reposo: 33,0 s;

será:

$$b_1 = 1 - \frac{100}{180{,}2} = 0{,}445$$

$$\ln b_1 = -0{,}8095$$

$$x = \frac{33}{11} = 3$$

$$y = \frac{3600}{180{,}2 \cdot 33} = 0{,}6054$$

Hay que resolver la ecuación:

$$\frac{1{,}6648 - (1-b_3)}{(1-b_3) \cdot (0{,}6054 - \frac{1-b_3}{2})} =$$

$$= \frac{2{,}4286 + \ln b_3}{(1-b_3) + 0{,}3946 \cdot \ln b_3}$$

La solución, determinada utilizando el programa de cálculo *MathCad* 4.0, es b_3 = 0,1462. esta variable corresponde una velocidad V_3 = 153,9 km/h.

Consiguientemente, los parámetros del vehículo **SEAT** Ibiza **Sxi**, que se ha tomado como patrón, son:

$$B = \frac{\ln 0{,}1462 + 2{,}4286}{1{,}6648 - 0{,}8538} = 0{,}6238$$

$$A = -\frac{180{,}2}{3{,}6 . 11} \times$$

$$\times \frac{0{,}6238 . 0{,}5549 + \ln 0{,}4451}{1 - 0{,}6238} = 5{,}605$$

Puede servir calcular cuánto tiempo se tarda, basándose en estos parámetros, en recorrer 400 m, se parte de la ecuación del camino recorrido para hallar la velocidad (representada por b_2) al alcanzar los 400 m:

$$(1-b_2) \cdot \left[1 + \frac{0{,}6238}{2} . (1-b_2)\right] + \ln b_2 =$$

$$= -\frac{5{,}605 . (1-0{,}6238)}{\left(\frac{180{,}2}{3{,}6}\right)^2} . 400 = -0{,}3366$$

La solución de esta ecuación trascendente, determinada utilizando el programa de cálculo *MathCad 4.0*, es b_2 = 0,307 7, a la que corresponde una velocidad V_2 = 124,8 km/h alcanzada al rebasar los 400 m de recorrido. Aplicando ahora la ecuación del tiempo:

$$t_2 = -\frac{180{,}2}{3{,}6 \cdot 5{,}605 \cdot (1-0{,}6238)} \times$$

$$\times \left[0{,}6238 . (1-0{,}3077) + \ln 0{,}3077\right] =$$

$$= 17{,}73 s$$ ■

Sandro Rocci. Universidad Politécnica de Madrid.