



MEJORA DE TRAZADO DE CARRETERAS

* Por **MARCELINO CONESA LUCERGA**
Y **ALFREDO GACICA GARCIA**

La importancia de contar con un método adecuado para el diseño de proyectos viarios es evidente. Sobre todo, si tenemos en cuenta el hecho de que los ingenieros de caminos trabajan, normalmente, con proyectos basados en trazados viarios ya existentes y que por tanto, han ido evolucionando a lo largo del tiempo.

1. INTRODUCCION

La red de carreteras de un país no surge en su totalidad científicamente, como pueden realizarse hoy en día los proyectos de los nuevos tramos de carreteras cumplimentando un gran número de exigencias técnicas.

Hay tres bloques de carreteras fundamentalmente:

— La mayor parte de ellas, que han evolucionado gradualmente a lo largo de dilatados periodos de tiempo y con diferentes criterios de calidad.

— Las reformas recientes importantes (variantes, desdoblamientos, mejoras de curvas, etc...) de las que tenemos conciencia actual pero de las que pasado el tiempo, se olvida su actualidad y desgraciadamente su calidad y se integran en el grupo anterior.

— Las nuevas redes (autopistas, autovías completamente nuevas, redes arteriales, etc.).

La vía va en gran medida paralela a la vida, y sus exigencias van evolucionando a lo largo del tiempo a causa de la demanda. La mayor parte de las sendas que permitían el cruce de dos mujeres con cántaros o de las vías pecuarias para la transhumancia del ganado, evolucionaron para dar servicio a las caballerías, los carros, las diligencias y las sucesivas generaciones de coches y camiones con su correspondiente progresión de velocidades máximas, aceleraciones, relación peso/potencia, anchos, largos, radios de giro, pesos por eje, etc.

Una gran parte del trabajo del ingeniero de carreteras va a estar relacionado con mejoras puntuales, o de mayor importancia, pero apoyadas en trazados existentes con grandes limitaciones.

Están elegidas las gargantas de cruce, discurren grandes tramos junto a precipicios, urbanizaciones, zonas verdes, ríos o desmontes escarpados, generalmente intocables, que hacen imposible en gran medida y según los casos variar vértices, tangentes, desarrollos u ocupaciones, reflejadas éstas últimas en gran medida por las bisectrices de las curvas.

Durante la explotación de la vía nos surgirán puntos negros con limitaciones de velocidad y visibilidad, con una curvatura mucho más importante que la del tramo que le precede, que altera el ritmo visual, produce sorpresa en el conductor y aumenta el riesgo de accidente, a pesar de disponer de una correcta señalización; pero es probable que la no corrección de esa curva que no ha sido mejorada por quienes nos precedieron obedezca a fuertes limitaciones contiguas cuyas posibilidades debemos agotar, o al menos minimizar su alteración.

Incluso cuando proyectamos las propias variantes, tenemos condicionados los puntos de salida por edificaciones o accidentes contiguos, río, ferrocarril, áreas de servicio, etc. No siempre la zona a ocupar por la traza está completamente libre. Planes de Ordenación con poca definición nos han dejado una franja a ocupar estricta, cuya previsión y diseño es exclusivamente gráfico, no ha sido realizado geométricamente y a la hora de realizar el cálculo definitivo nos crea grandes problemas de ocupación. El eje cabe dentro de la franja reservada a base de pasar de uno a otro borde, desapareciendo en gran medida las zonas de servidumbre de la nueva vía, zonas verdes de plan General y especialmente la línea de edificación. Cualquier incidencia de ese tipo puede obligar en el mejor de los casos a modificar el Plan, cuando no a hacer inviable la obra.

Incluso en los trazados nuevos sin limitaciones en el terreno, tan singulares y fuertes como las indicadas y aun contando con las posibilidades de ajuste que permiten los programas de cálculo de trazado de carreteras, utilizando alineaciones flotantes —ya sean círculos para ajustarnos a una zona a circunscribir sin bajar de un determinado radio o rectas para no sobrepasar una determinada zona— mediante todas las combinaciones posibles entre ellas:

Recta flotante entre dos círculos dados.

Círculo flotante entre dos rectas dadas.

Círculo flotante entre círculo y recta dados.

Círculo flotante entre dos círculos dados.

Es posible que realicemos un primer ajuste gráfico y selección de datos previos en planta, que probablemente dibujaremos sin curvas de transición, es decir, solo con rectas y círculos aproximados y que posteriormente debemos transformar en círculos de radios iguales o distintos a los primeros, pero que dispongan de las correspondientes curvas de transición, y que entonces para realizar el ajuste definitivo ya tendrán las limitaciones que nosotros mismos nos hayamos impuesto previamente en la elección gráfica realizada.

Vemos que en todos los casos, desde las reformas más simples sin poder casi movernos de la traza, hasta los ajustes de las obras completamente nuevas, nos interesa disponer de correlaciones entre una curva circular exclusivamente y otra con curvas de transición, que en este trabajo serán siempre clotoides iguales en ambos extremos.

En todos los casos nos interesará disponer de ábacos que representen cómo influyen las pequeñas variaciones del ángulo de giro entre las alineaciones extremas, ya que algunas veces tendremos la posibilidad de efectuar pequeños ajustes y variaciones del mismo.

También es muy importante disponer de todas las posibilidades de elección del parámetro de la clotoide de enlace.

Las instrucciones de todos los países recomiendan valores de estos parámetros para cada velocidad específica o radio de curvatura, y existe en algunos proyectistas el hábito de utilizar exacta e ineludiblemente dichos valores. La realidad es que los parámetros propuestos son por un lado mínimos, e incluso la Instrucción 3.1.I.C. admite unas condiciones normales y otras mínimas, y existen otras relaciones distintas para

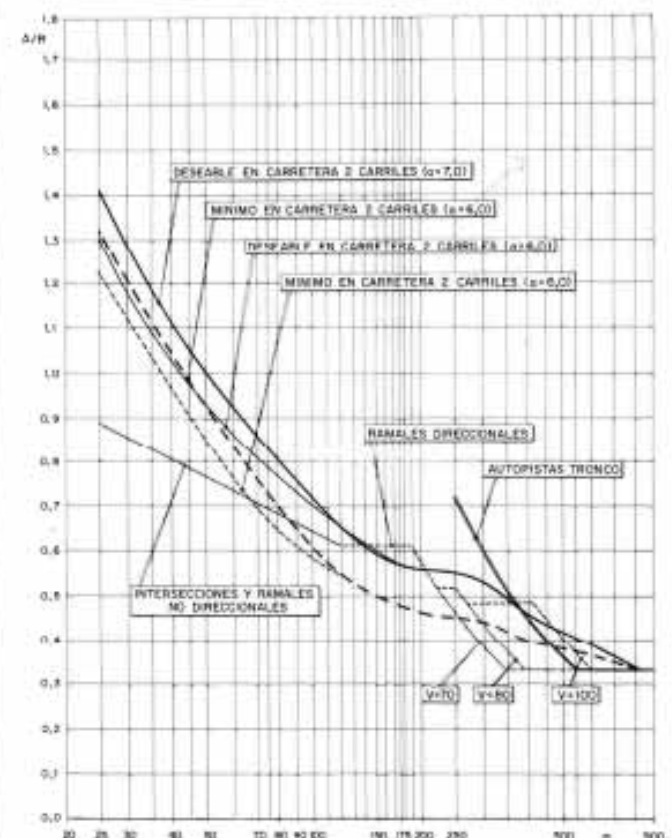


Fig. 1. Relación entre el Radio y el Parámetro Unitario (A/R)

intersecciones y enlaces en las Recomendaciones correspondientes, y otras para Autopistas en la Instrucción de trazado complementaria de la de carreteras (Fig. 1). Hay por tanto siempre una posibilidad real de variación en el parámetro, que nos interesa poder analizarla visualmente con facilidad.

A continuación recogemos la formulación y valores recomendados de los parámetros, su representación en función de la velocidad específica y radio de curvatura, tanto en valores absolutos como relativos. Estos últimos serán los que manejaremos habitualmente por su relación tan directa con el ángulo girado en las curvas de transición según la conocida relación

$$\frac{A}{R} = \sqrt{2}\tau \quad \text{o} \quad \tau = 0,5 \left(\frac{A}{R} \right)^2$$

(Ver Anejo 2)

A la vista de todo lo expuesto cualquier tipo de análisis entre las características iniciales de una curva circular y las finales de otra con curvas de transición nos ayudará al diseño de la modificación necesaria. Frecuentemente nos vamos a encontrar con las siguientes clases de limitaciones:

— Definida la ocupación máxima de una curva circular dada entre alineaciones extremas rectas por el tamaño de su bisectriz, sustituirla por otra que incluya curvas de transición iguales, manteniendo el mismo tamaño de bisectriz, deduciendo en ese supuesto qué le ocurre a los nuevos radio, tangente, desarrollo y parámetros.

— Limitada la posibilidad de ampliación de la tangente de una curva circular entre dos alineaciones rectas dadas, o dicho de otra forma más general, el tramo recto disponible entre dos curvas consecutivas para realizar su mejora mediante la inclusión de las correspondientes curvas de transición, analizar las repercusiones, en los nuevos radio, bisectriz, desarrollo y parámetros elegidos, si no rebasamos la longitud de tangente disponible.

— Sustitución de una curva circular entre dos alineaciones rectas sin curvas de acuerdo por dos clotoides exclusivamente, sin tramo circular (clotoides en punta), analizando las repercusiones que resultan entre las bisectrices, desarrollos, radios y tangentes de ambos casos para cada valor del ángulo girado entre las alineaciones rectas extremas.

— Análisis del caso particular de las clotoides en punta simétricas empleadas para sustituir una curva circular manteniendo el centro de ésta, realizando solo la reducción de radio imprescindible para lograrlo.

— Análisis de las relaciones entre las diversas magnitudes usuales, radio, parámetro, bisectriz, tangente y desarrollo inicial y final, cuando se le añaden a una curva circular de enlace entre dos alineaciones rectas extremas determinadas clotoides, manteniendo el valor del radio y naturalmente mediante el retranqueo preciso y aplicación de los resultados al caso general de emplear además para el nuevo enlace un radio distinto del inicial.

2. FORMULACION

A continuación recogemos la formulación necesaria para resolver los diversos casos enunciados y presentamos los resultados con ejemplos de ábacos y tablas que se pueden organizar para ayudar a su resolución.

2.1. Círculo

— Enlace entre dos alineaciones rectas que forman entre sí un ángulo ω mediante una curva circular exclusivamente de radio R_i (Fig. 2)

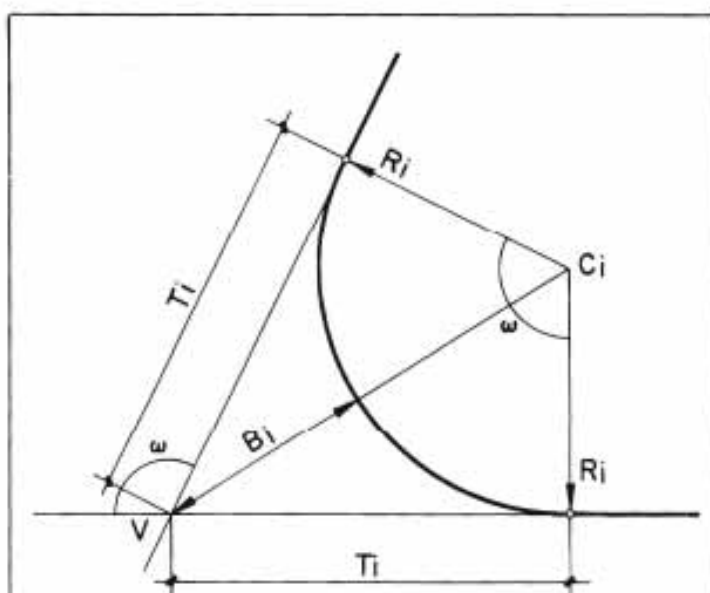


Fig. 2. Enlace entre dos Alineaciones Rectas Mediante un Círculo de Radio R_i .

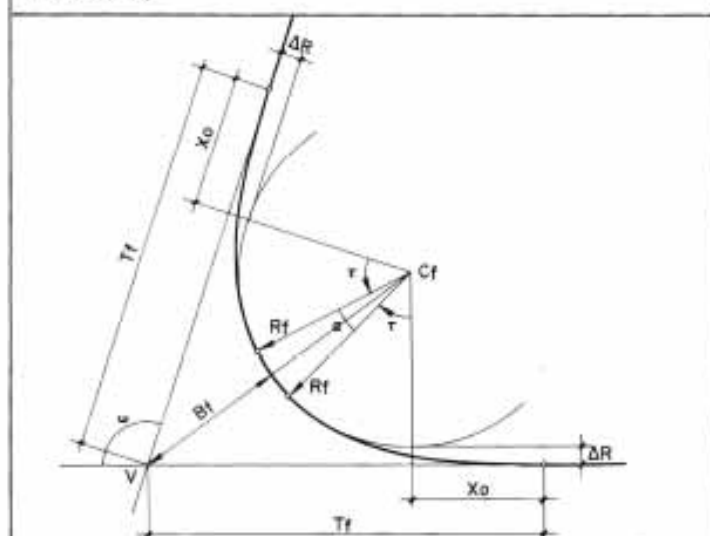


Fig. 3. Enlace entre dos Alineaciones Rectas Mediante un Círculo de Radio R_i y dos Clotoides simétricas de Parámetro A.

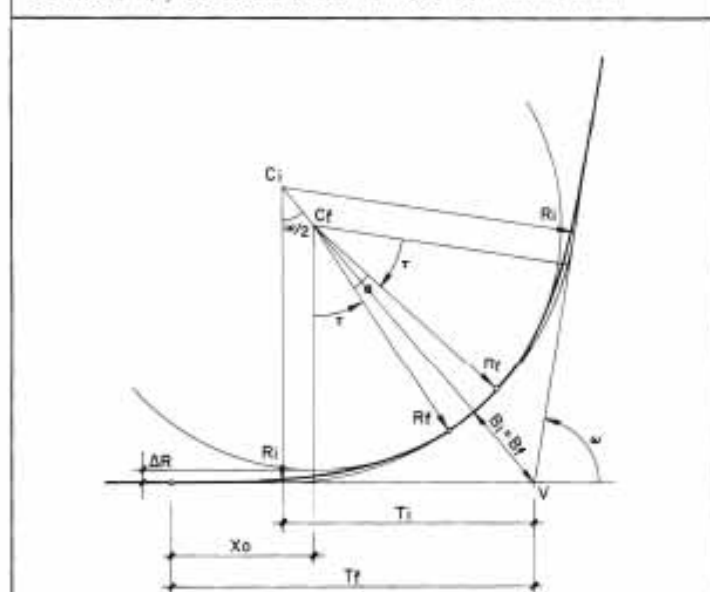


Fig. 4. Igualdad de Bisectrices.

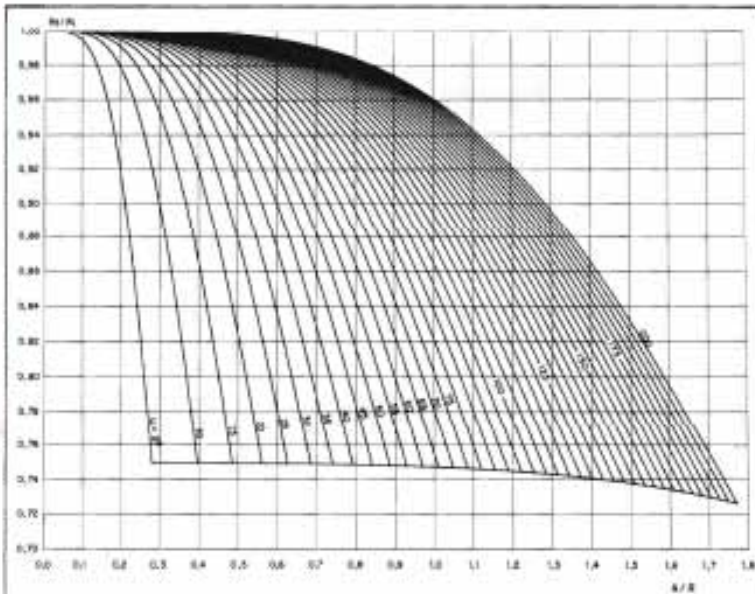


Fig. 5. Igualdad de Bisectrices: Relación de Radios

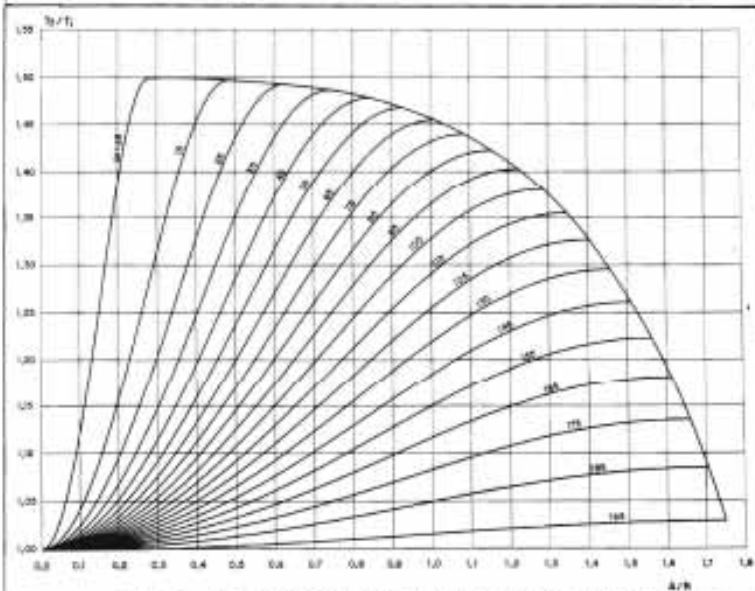


Fig. 6. Igualdad de Bisectrices: Relación de Tangentes

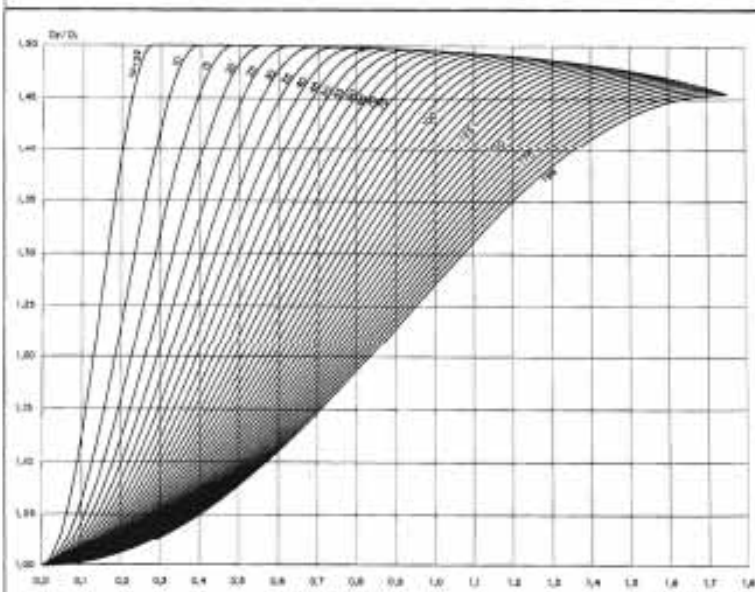


Fig. 7. Igualdad de Bisectrices: Relación de Desarrollos

$$\begin{aligned} \text{Tangente unitaria} &= T_1/R_1 = \operatorname{tg} \omega/2 \\ \text{Bisectriz unitaria} &= B_1/R_1 = \frac{1}{\cos \omega/2} - 1 \\ \text{Desarrollo unitario} &= D_1/R_1 = \frac{\pi \omega}{200} \end{aligned}$$

2.2. Círculo y clotoides

— Enlace entre dos alineaciones rectas que forman entre sí un ángulo ω mediante una curva circular de radio R_1 y dos clotoides simétricas de parámetro A (Fig. 3).

$$\text{Tangente unitaria} = T_1/R_1 = \left(1 + \frac{\Delta R_1}{R_1}\right) \operatorname{tg} \omega/2 + \frac{X_0}{R_1}$$

$$\text{Bisectriz unitaria} = B_1/R_1 = \frac{1 + \frac{\Delta R_1}{R_1}}{\cos \omega/2} - 1$$

$$\text{Desarrollo unitario} = D_1/R_1 = (\omega + 2\tau) \frac{\pi}{200}$$

siendo:

$$\tau = 0.5 \left(\frac{A}{R_1}\right)^2$$

$$1 + \frac{\Delta R_1}{R_1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1} \tau^{2n}}{(4n-1) - (2n-1)!} + \cos \tau$$

$$\frac{X_0}{R_1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1} \tau^{2n-1}}{(4n-3) - (2n-2)!} - \sin \tau$$

2.3. Igualdad de bisectrices

— Mejora del enlace entre dos alineaciones rectas que forman entre sí un ángulo ω , sustituyendo la curva circular inicial de radio R_1 por otra R_2 con sus correspondientes curvas de acuerdo de parámetro A , de forma que se mantenga la dimensión de la bisectriz inicial (Fig. 4).

Relación de Radios:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1 - \cos \frac{\omega}{2}}{1 + \frac{\Delta R_1}{R_1} - \cos \frac{\omega}{2}} \quad (\text{Fig. 5})$$

Relación de tangentes:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta R_1}{R_1}\right) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} + \frac{X_0}{R_1}}{\left(\frac{1 + \frac{\Delta R_1}{R_1} - \cos \frac{\omega}{2}}{1 - \cos \frac{\omega}{2}}\right) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}} \quad (\text{Fig. 6})$$

Relación de desarrollos:

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\omega + 2\tau}{\omega} \frac{1 - \cos \frac{\omega}{2}}{1 + \frac{\Delta R_1}{R_1} - \cos \frac{\omega}{2}} \quad (\text{Fig. 7})$$

Los ábacos 5, 6 y 7 representan las tres relaciones indicadas, siendo un ejemplo de los valores numéricos resultantes los de la tabla 1.

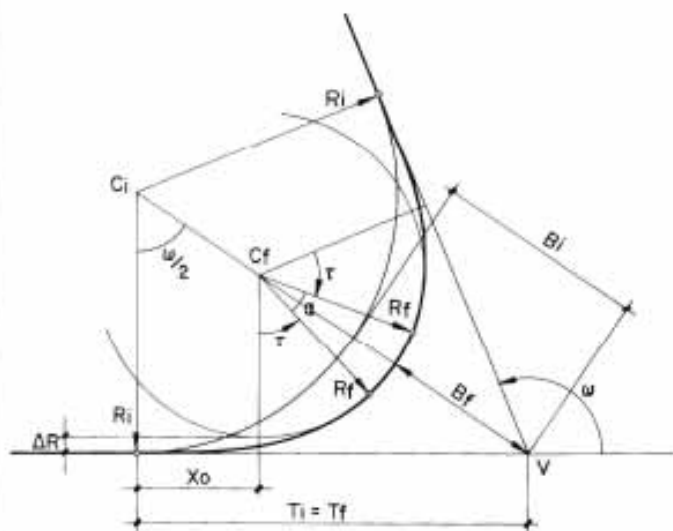


Fig. 8. Igualdad de Tangentes.

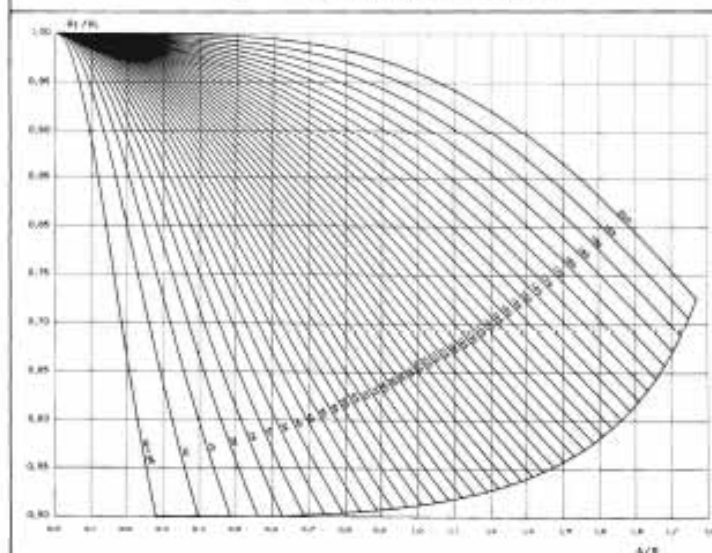


Fig. 9. Igualdad de Tangentes: Relación de Radios.

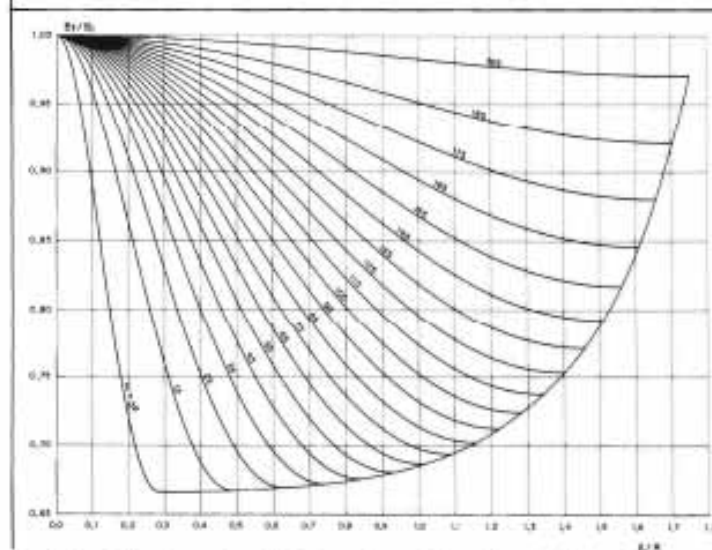


Fig. 10. Igualdad de Tangentes: Relación de Bisectrices.

2.4. Igualdad de tangentes

Mejora del enlace entre dos alineaciones rectas que forman entre sí un ángulo ω , sustituyendo la curva circular inicial de radio R_i por otra de radio R_f con sus correspondientes curvas de acuerdo de parámetro A , de forma que se mantenga la dimensión de la tangente inicial (Fig. 8).

Relación de radios:

$$\frac{R_f}{R_i} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}{\left(1 + \frac{\Delta R_i}{R_i}\right) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} + \frac{X_o}{R_i}} \quad (\text{Fig. 9})$$

Relación de bisectrices:

$$\frac{B_f}{B_i} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta R_i}{R_i}\right) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}{\left(1 + \frac{\Delta R_i}{R_i}\right) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} + \frac{X_o}{R_i}} \quad (\text{Fig. 10})$$

Relación de desarrollos:

$$\frac{D_f}{D_i} = \frac{\omega + 2\tau}{\omega} \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}{\left(1 + \frac{\Delta R_i}{R_i}\right) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} + \frac{X_o}{R_i}} \quad (\text{Fig. 11})$$

Las curvas 9, 10 y 11 representan las tres relaciones anteriores, siendo un ejemplo de los valores numéricos resultantes los de la tabla 2.

2.5. Clotoides en punta

Mejora del enlace entre dos alineaciones rectas que forman entre sí un ángulo ω sustituyendo la curva circular inicial de radio R_i por dos clotoides en punta de radio mínimo R_i (Fig. 12).

Relación de bisectrices:

$$\frac{B_f}{B_i} = \frac{R_i}{R_i} \frac{1 + \frac{\Delta R_i}{R_i} - \cos \frac{\omega}{2}}{1 - \cos \frac{\omega}{2}} \quad (\text{Fig. 13})$$

siendo $\tau = \frac{\omega}{2}$

Relación de tangentes:

$$\frac{T_f}{T_i} = \frac{R_i}{R_i} \left(1 + \frac{\Delta R_i}{R_i} + \frac{X_o}{R_i} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{Fig. 14})$$

Relación de desarrollos:

$$\frac{D_f}{D_i} = 2 \frac{R_i}{R_i}$$

Las curvas 13 y 14 representan los dos primeros casos, siendo una muestra de los resultados numéricos los recogidos en la tabla 3. La figura 15 muestra el conjunto de las posibles relaciones de tangentes y bisectrices en función de la relación de radios deseada.

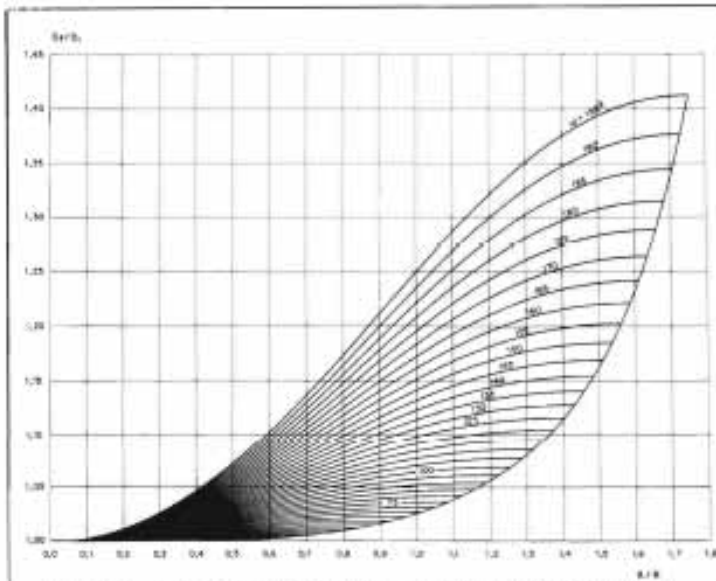


Fig. 11. Igualdad de Tangentes. Relación de Desarrollos.

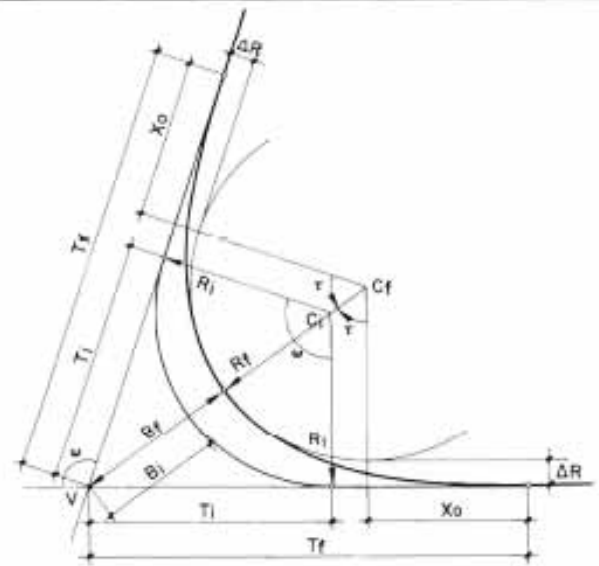


Fig. 12. Clotoides en Punta.

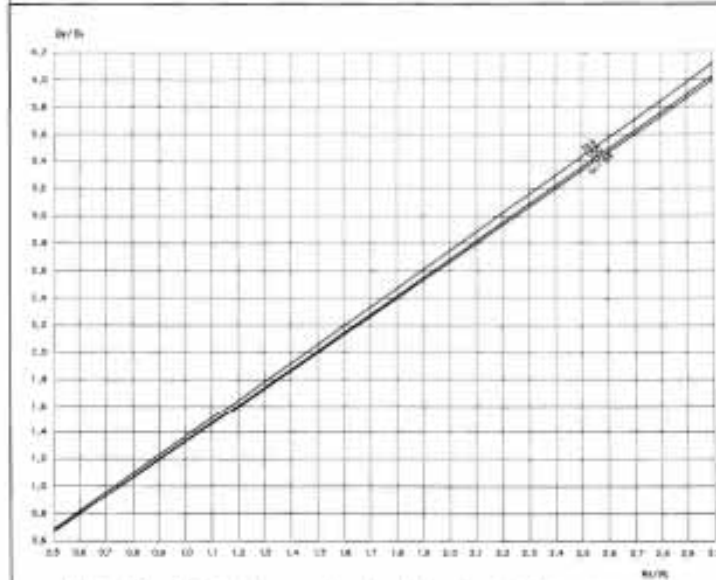


Fig. 13. Clotoides en Punta: Relación de Bisectrices.

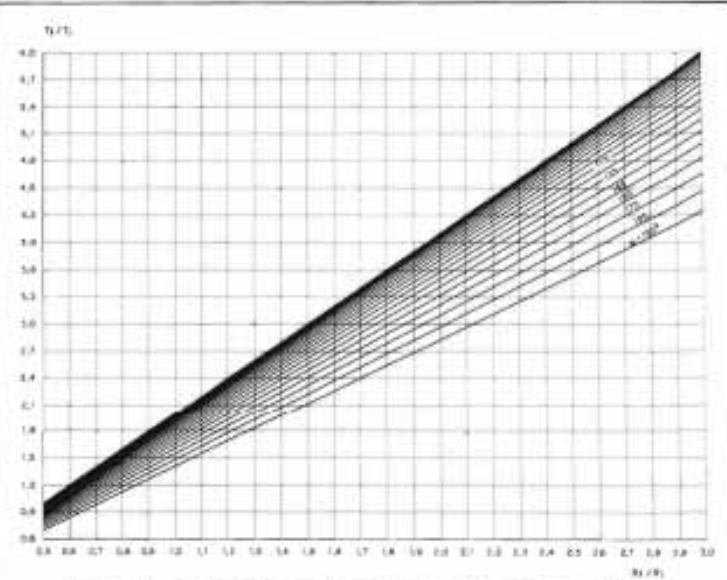


Fig. 14. Clotoides en Punta: Relación de Tangentes.

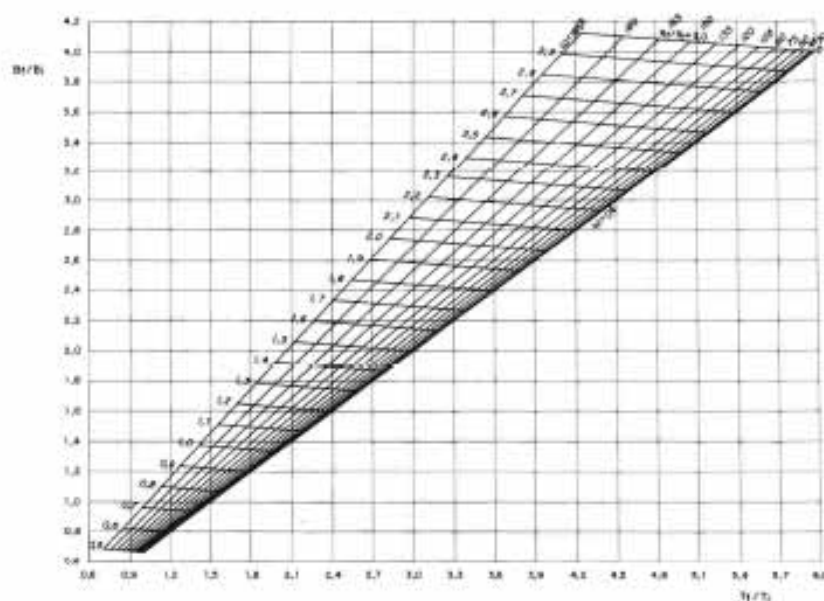


Fig. 15. Clotoides en Punta: Relaciones de Tangentes y Bisectrices.

2.6. Igualdad de radios

Mejora del enlace entre dos alineaciones rectas que forman entre sí un ángulo ω sustituyendo la curva circular inicial de radio R_i por otra del mismo radio, retranqueada lo suficiente para intercalar entre ella y las alineaciones rectas dos clotoides simétricas de parámetro A (Fig. 16).

Relación de bisectrices:

$$\frac{B_f}{B_i} = \frac{1 + \frac{\Delta R_i}{R_i} - \cos \frac{\omega}{2}}{1 - \cos \frac{\omega}{2}} \quad (\text{Fig. 17})$$

Relación de tangentes:

$$\frac{T_f}{T_i} = 1 + \frac{\Delta R_i}{R_i} + \frac{X_0/R_i}{\tan \omega/2} \quad (\text{Fig. 18})$$

Relación de desarrollos: $\frac{D_f}{D_i} = 1 + \frac{2\tau}{\omega}$ (Fig. 19)

Las curvas 17, 18 y 19 representan las relaciones anteriores, teniendo además el gráfico de la figura 20 para estudiar directamente la evolución entre las relaciones de bisectrices y tangentes. Un ejemplo de los valores numéricos resultantes serían los de la tabla 4.

2.7. Radios diferentes

Mejora del enlace entre dos alineaciones rectas que forman entre sí un ángulo ω sustituyendo la curva circular inicial de radio R_i por otra de distinto radio, y retranqueada lo suficiente para intercalar entre ella y la alineaciones rectas dos clotoides simétricas de parámetro A (Fig. 21).

Relación de bisectrices:

$$\frac{B_f}{B_i} = \frac{1 + \frac{\Delta R_f}{R_i} - \cos \frac{\omega}{2}}{1 - \cos \frac{\omega}{2}} \cdot \frac{R_i}{R_f}$$

Relación de tangentes:

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(1 + \frac{\Delta R_f}{R_i} + \frac{X_0/R_i}{\tan \frac{\omega}{2}} \right) \cdot \frac{R_i}{R_f}$$

Relación de desarrollos:

$$\frac{D_f}{D_i} = \left(1 + \frac{2\tau}{\omega} \right) \cdot \frac{R_i}{R_f}$$

Existe por tanto proporcionalidad con los casos de radios iguales y valen los mismos gráficos y tablas desarrollados para aquéllos.

3. ANALISIS GLOBAL

Como síntesis de todo lo expuesto y a la vista del material

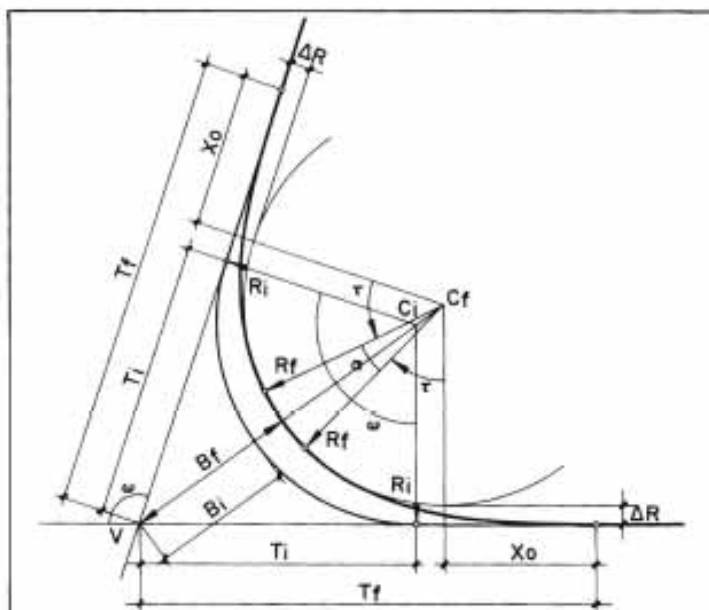


Fig. 16. Igualdad de Radios.

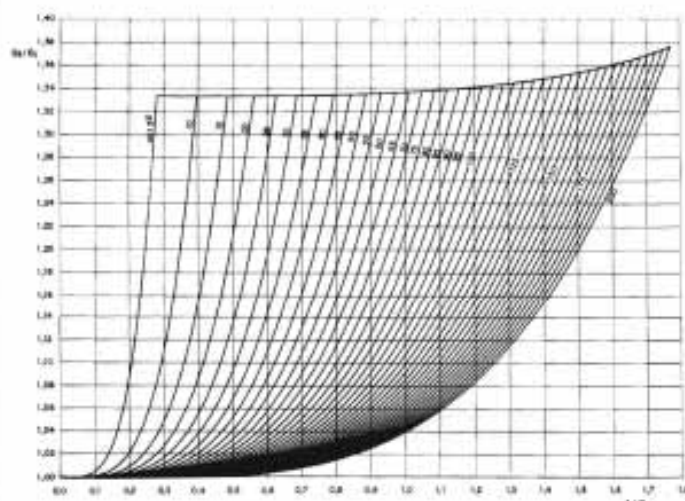


Fig. 17. Igualdad de Radios: Relación de Bisectrices.

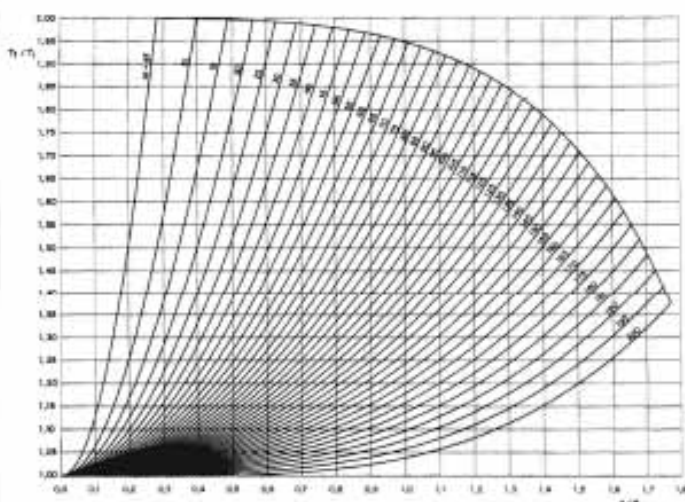


Fig. 18. Igualdad de Radios: Relación de Tangentes.

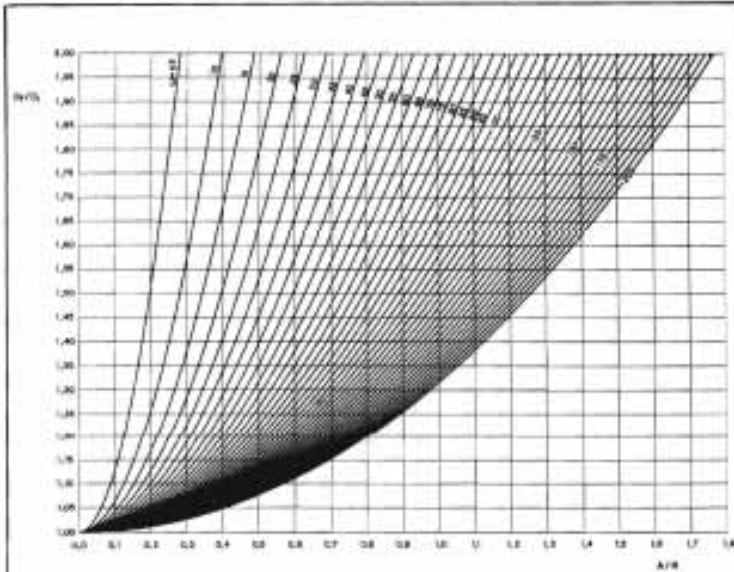


Fig. 19. Igualdad de Radios: Relación de Desarrollos.

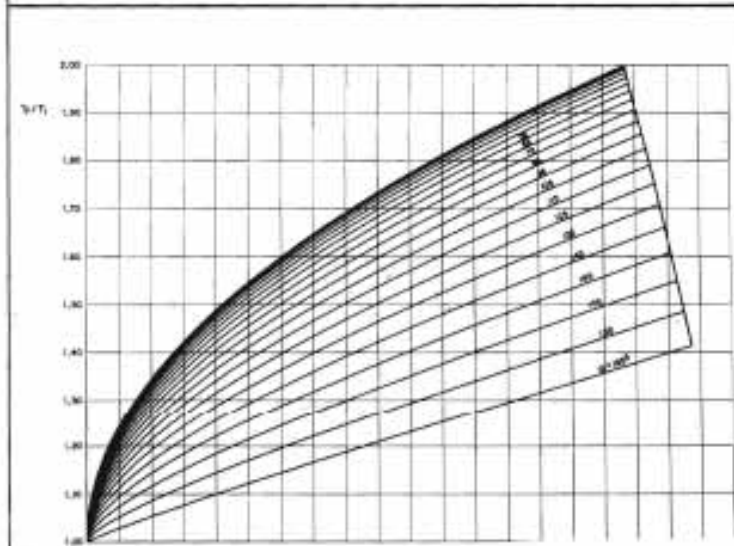


Fig. 20. Igualdad de Radios: Relaciones de Tangentes v Bisectrices.

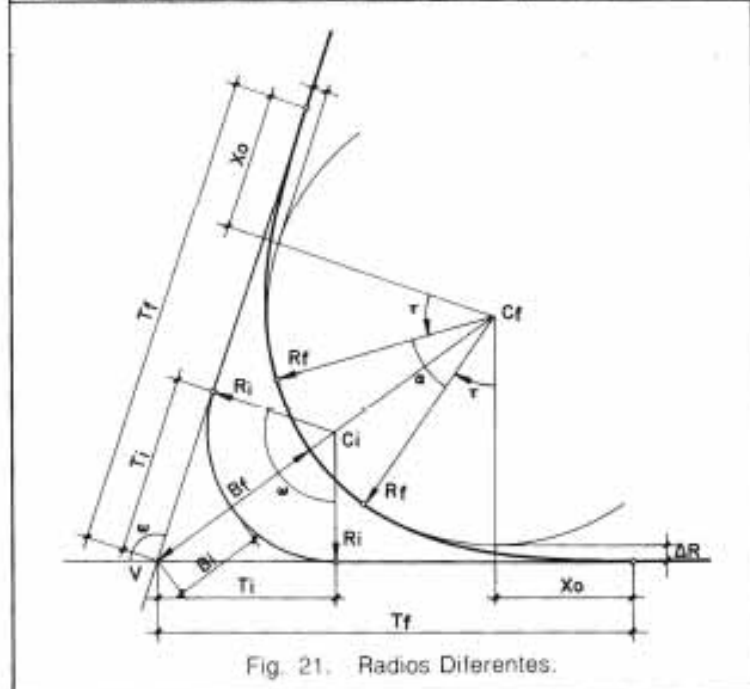


Fig. 21. Radios Diferentes.

anterior del que se puede disponer o elaborar fácilmente, veamos cuál es el funcionamiento en los casos prácticos posibles.

Dispondremos de dos alineaciones rectas con un ángulo de giro entre ellas determinado, ancladas por una curva, posiblemente circular, de la que podemos apreciar relativamente bien la bisectriz actual y no muy bien la tangente que tiene, ni el desarrollo de la misma.

Obviamente, si se trata de un tanteo de proyecto que hemos realizado con plantillas conoceremos el radio utilizado además del ángulo; los demás valores son resultados fácilmente deducibles. Si se trata de una carretera real, tanto si estamos en el campo como si trabajamos sobre un plano fotogramétrico, el vértice es fácilmente accesible, la bisectriz se puede apreciar bastante bien y de ahí deducimos el radio de la curva circular correspondiente que ocasiona esa bisectriz, ya que lo normal en trazados antiguos es que no disponga de curvas de transición.

Serán más difíciles de apreciar tanto sobre plano como *in situ* los puntos de tangencia entre círculo y recta y en consecuencia el valor de las tangentes y el desarrollo de la curva circular, máxime si existe una pequeña curva de transición.

En general *in situ* será más fácil determinar el radio de la curva circular que posiblemente exista, mediante la elección de tres puntos de la misma midiendo cuerdas y ángulos o determinando coordenadas mediante las conocidas fórmulas:

$$A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$C = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$R = b \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - A - C\right)}{\sin^2(A + C)}$$

siendo

$$a^2 = (X_c - X_b)^2 + (Y_c - Y_b)^2$$

$$b^2 = (X_a - X_c)^2 + (Y_a - Y_c)^2$$

$$c^2 = (X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2$$

En estos casos, por cualquiera de los procedimientos indicados obtendremos la bisectriz o la tangente existente, y de ahí el radio del círculo correspondiente mediante las siguientes relaciones unitarias:

$$\frac{R_i}{B_i} = \frac{\cos \omega / 2}{1 - \cos \omega / 2}$$

$$\frac{R_i}{T_i} = \cotg \omega / 2$$

Si somos capaces de precisar bisectriz y tangente y vemos que los valores obtenidos no compatibilizan ambas ecuaciones es claro que, aparte posibles errores, existe algún tipo de transiciones, que si las asimilamos a clotoides iguales podemos incluso determinar su parámetro probable a base de determinar la relación unitaria entre ambos valores:

$$\frac{T}{B} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta R}{R}\right) \sin \omega / 2 + \frac{X_c}{R} \cos \omega / 2}{\left(1 + \frac{\Delta R}{R}\right) - \cos \omega / 2}$$

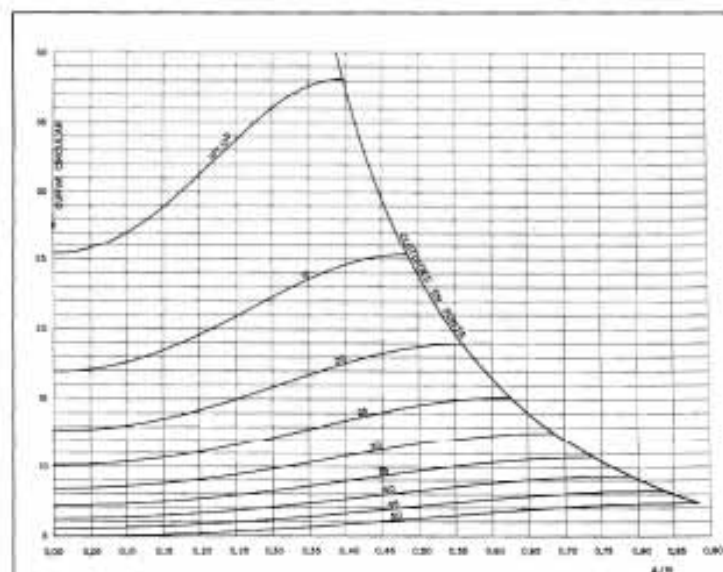


Fig. 22.1. Relación entre Tangentes y Bisectrices en Curvas.

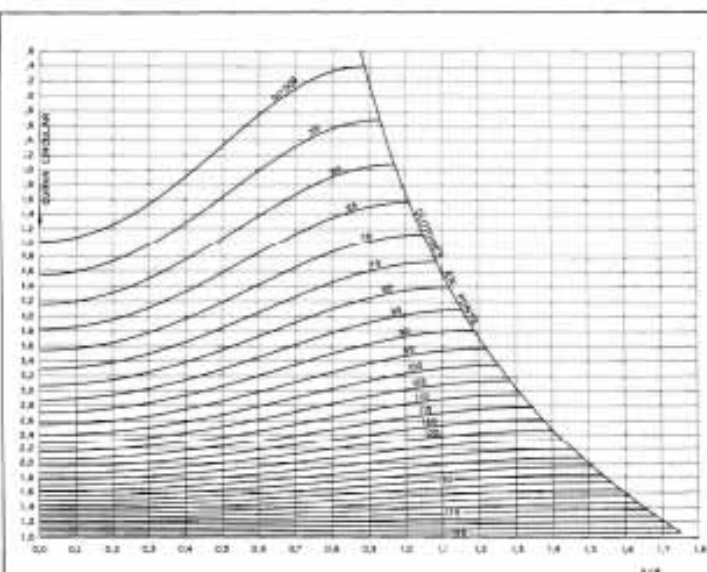


Fig. 22.2. Relación entre Tangentes y Bisectrices en Curvas.

Con la ayuda de los ábacos adjuntos acotados entre el caso de círculo y clotoides en punta estimamos la clotoide utilizada y a partir de ella el radio existente. (Fig. 22.1 y 22.2).

Pero el procedimiento normal es que dispongamos de un círculo exclusivamente, y que para adaptar dicho trazado a la instrucción vigente necesitemos emplear unas clotoides cuyo parámetro deberá superar deseablemente un determinado valor unitario, existiendo generalmente además un valor mínimo recomendado.

Asimismo existirán unas limitaciones máximas respecto de lo que puede ocupar la curva, que las podremos objetivar aproximadamente con los valores extremos de la bisectriz resultante después de la reforma y con el valor máximo de las tangentes resultantes. A veces, en casos singulares como la subida a un puerto o un enlace, también interesará que el desarrollo final tenga al menos un determinado valor para conseguir una determinada pendiente después de variar la longitud del trazado.

Conocemos por tanto en general

Bisectriz = B_i

y/o Tangente = T_i

iniciales, de ellas obtenemos el radio del círculo existente y

para dicho radio conocemos la relación $\frac{A}{R}$ mínima mínimo y mínima deseablea utilizar según la Instrucción.

Con ayuda de los ábacos 5 al 16 determinamos en cada caso los radios, bisectriz, tangente y desarrollo resultantes en los supuestos de sustituir el círculo dado por un círculo y clotoides, bien manteniendo la bisectriz inicial, la tangente inicial o utilizando para la mejora clotoides en punta.

Con la ayuda de los gráficos nº 17 y 18 conocemos la relación de la tangente y bisectriz resultantes en el supuesto de mantener el radio del círculo y utilizar clotoides simétricas de transición.

En dichos gráficos existe un límite superior que marca el empleo de clotoides en punta, es decir, sin desarrollo circular. Si nuestro caso sobrepasa dicho punto no existe solución, y por tanto hay que rebajar el parámetro de la clotoide por debajo de los recomendados en la Instrucción, reducir el radio del círculo y volver a empezar determinando $\frac{A}{R}$ o, si fuera posible, ampliar el ángulo entre las alineaciones rectas.

Si no llegamos al límite citado, la situación es compatible con emplear clotoides sin disminuir el radio del círculo y permite incluso ampliar el parámetro mínimo deducido hasta la situación de clotoides en punta siempre que la relación de bisectrices y tangentes

$$\left(\frac{B_i}{B_f}\right)_{R_i=R_f} \text{ y } \left(\frac{T_i}{T_f}\right)_{R_i=R_f}$$

resultantes no sobrepasen los valores disponibles.

En el supuesto de estar sobrados dichos valores, como hemos deducido que existe proporcionalidad entre la relación de bisectrices y tangentes resultantes variando el radio n veces con la obtenida manteniendo el radio inicial.

$$\frac{B_i}{B_f} = n \left(\frac{B_i}{B_f}\right)_{R_i=R_f} = \frac{R_f}{R_i} \left(\frac{B_i}{B_f}\right)_{R_i=R_f}$$

$$\frac{T_i}{T_f} = n \left(\frac{T_i}{T_f}\right)_{R_i=R_f} = \frac{R_f}{R_i} \left(\frac{T_i}{T_f}\right)_{R_i=R_f}$$

Con la ayuda de un pequeño gráfico auxiliar de transformación incluido en la Fig. 23 que nos dé el valor de n , a la vista de la relación de bisectrices y tangentes disponibles, obtenemos el nuevo valor del radio utilizable, que al ser mayor permitirá en general un menor valor del parámetro de la curva de transición y en consecuencia todavía tendremos holgura en los valores, bien porque empleamos parámetros superiores a los mínimos recomendados o bien porque resulten bisectrices y tangentes inferiores a los límites, pudiendo seguir el ciclo de iteraciones hasta llegar al límite bisectriz o tangente que antes se agote.

Si inicialmente hubiéramos sobrepasado el límite y lo que necesitáramos fuera reducir el radio disponible por haber superado las relaciones

$$\left(\frac{T_i}{T_f}\right)_{R_i=R_f} \text{ o } \left(\frac{B_i}{B_f}\right)_{R_i=R_f}$$

el propio gráfico nos sirve de ayuda para elegir el radio, con la diferencia que ahora al disminuir R el valor $\frac{A}{R}$ recomendado es mayor y se precisa ajustar los valores obtenidos para que no existan solapamientos.

4. FORMA DE OPERAR

Veamos unos ejemplos elementales para aclarar todos estos procesos operativos.

Tenemos dos alineaciones rectas con ángulo de giro de 45° enlazadas por una curva circular de 250 m., y queremos analizar qué radio y qué transiciones empleamos para su mejora.

Para $R = 250$ recomienda la Instrucción una relación

$$\frac{A}{R} = 55 \text{ como deseable y } 0,455 \text{ como mínima.}$$

a) Si queremos mantener la misma bisectriz que en la curva circular que vale:

$$B_i = R_i \frac{1 - \cos 22,5^\circ}{\cos 22,5^\circ} = 16,47 R_i$$

utilizando el gráfico de la Fig. 5 obtenemos, para el parámetro unitario recomendado por la Instrucción para $R = 250$ m., los valores que resuelven el problema.

$$\omega = 45^\circ \quad \frac{R_1}{R_i} = 0,942$$

$$\frac{A}{R} = 0,55$$

$$R_1 = 0,942 \times 250 = 235,5$$

$$A_1 = 0,55 \times 235,5 = 129,525$$

El mínimo parámetro compatible con el citado radio según la Instrucción nos dará el mayor radio posible con transiciones.

$$\frac{A}{R} = 0,455 \quad \frac{R_2}{R_i} = 0,972 \quad R_2 = 243,0 \quad A_2 = 110,565$$

En realidad en los dos casos ha resultado un radio menor que el inicial, por lo que el parámetro utilizado no sería el límite utilizable y habría que agotar el valor recomendado en la Instrucción que para radios inferiores resulta algo superior.

$$\text{Para } R_1 = 235,5 \text{ sería } \frac{A}{R} = 0,56 \text{ (valor recomendado)}$$

$$\text{por lo que resultaría } \frac{R_3}{R_i} = 0,938 \quad R_3 = 234,5 \quad A_3 = 131,32$$

ligeramente distinto al anterior. El parámetro mínimo para $R = 243$ sería $\frac{A}{R} = 0,46$, resultando aproximadamente

$$\text{la misma relación } \frac{R_2}{R_i} = 0,97 \text{ y en consecuencia los}$$

restantes valores obtenidos anteriormente, los mismos.

El máximo parámetro compatible con la geometría nos da el menor radio, que corresponde al caso de clotoides en punta, y viene dado en el mismo ábaco por el valor correspondiente al límite del mismo.

$$\frac{A}{R} = 0,84 \quad \frac{R_3}{R_i} = 0,749 \quad R_3 = 187,25 \quad A_3 = 157,290$$

En el ábaco de la Fig. 6 obtendríamos las tangentes correspondientes a esos tres casos en que mantenemos la misma bisectriz que en la curva circular primitiva.

Con $T_1 = R_i \tan 22,5^\circ = 92,23$ y $\omega = 45^\circ$ obtenemos

$$\frac{A}{R} = 0,56; \quad \frac{T_1}{T_i} = 1,340; \quad T_1 = 123,60 \text{ (parámetro normal)}$$

$$\frac{A}{R} = 0,46; \quad \frac{T_2}{T_i} = 1,252; \quad T_2 = 115,47 \text{ (parámetro mínimo)}$$

$$\frac{A}{R} = 0,84; \quad \frac{T_3}{T_i} = 1,478; \quad T_3 = 136,31 \text{ (máximo parámetro posible).}$$

Análogamente con el ábaco de fig. 7 obtendríamos los desarrollos de esos mismos tres casos.

$$\text{Con } D_1 = \pi R_i \frac{45}{200} = 176,71 \text{ y } \omega = 45^\circ \text{ resulta}$$

$$\frac{A}{R} = 0,56; \quad \frac{D_1}{D_i} = 1,354; \quad D_1 = 239,27 \text{ (parámetro normal)}$$

$$\frac{A}{R} = 0,46; \quad \frac{D_2}{D_i} = 1,263; \quad D_2 = 223,18 \text{ (parámetro mínimo)}$$

$$\frac{A}{R} = 0,84; \quad \frac{D_3}{D_i} = 1,497; \quad D_3 = 264,53 \text{ (máximo parámetro posible)}$$

Vemos que los radios no disminuyeron excesivamente salvo en el caso de clotoides en punta, pero aumentaron las tangentes y los desarrollos en curva y en consecuencia habría que vigilar que realmente quepa la curva resultante sin solaparse con las contiguas.

b) Si ahora lo que queremos es mantener la misma tangente que en la curva circular para evitar solapes, y recordamos que valía 92,23 m., mediante el ábaco de la figura 9 obtenemos, utilizando el parámetro recomendado por la Instrucción para $R = 250$ m., los valores buscados que resuelven el problema:

$$\omega = 45$$

$$\frac{A}{R} = 0,55 \quad \frac{R_4}{R_i} = 0,707 \quad R_4 = 176,75 \quad A_4 = 97,213$$

y para el mínimo parámetro deseable para $R = 250$ según la Instrucción.

$$\omega = 45$$



Para determinar los restantes valores de la curva de esos mismos tres casos procederemos como sigue. Las nuevas bisectrices las determinaremos con la ayuda del ábaco de la Fig. 10 recordando que la inicial valía 16,47 m.

$$\frac{A}{R} = 0,56; \frac{B_4}{B_i} = 0,746; B_4 = 12,29 \text{ (parámetro normal)}$$

$$\frac{A}{R} = 0,48; \frac{B_5}{B_i} = 0,788; B_5 = 12,98 \text{ (parámetro mínimo)}$$

$$\frac{A}{R} = 0,84; \frac{B_6}{B_i} = 0,676; B_6 = 11,13 \text{ (máximo parámetro)}$$

y los desarrollos de la curva incluido acuerdos los obtenemos con la ayuda de la Fig. 11 recordando que $D_i = 176,71$.

$$\frac{A}{R} = 0,56; \frac{D_4}{D_i} = 1,0106; D_4 = 178,58$$

$$\frac{A}{R} = 0,48; \frac{D_5}{D_i} = 1,0091; D_5 = 178,32$$

$$\frac{A}{R} = 0,84; \frac{D_6}{D_i} = 1,0131; D_6 = 179,02$$

Los desarrollos son sensiblemente iguales al inicial como era de esperar, al no variar las tangentes, pero las bisectrices y sobre todo los radios resultan muy afectados con la mejora de los acuerdos, por lo que el mantenimiento de la tangente debe ir, en general, emparejado con el empleo del menor parámetro compatible con la Instrucción que produce el mayor radio y la menor disminución de bisectriz.

c) Si queremos analizar directamente la repercusión del empleo de clotoides en punta como sustitutivo de la curva inicial anterior utilizaríamos los gráficos 13 y 14 y obtendríamos las bisectriz y tangente resultantes en función del radio elegido.

Si queremos mantener el radio $R = 250$ resultaría, recordando que $B_i = 16,47$ y $T_i = 92,23$:

$$\frac{R_i}{R_i} = 1; \frac{B_i}{B_i} = 1,334; B_i = 21,97$$

$$\frac{T_i}{T_i} = 1,973; T_i = 181,97$$

Con estos mismos gráficos podríamos comprobar los casos anteriormente estudiados. En el apartado a vimos que las clotoides en punta se producían con $A/R = 0,84$ ocasionando una relación de radio igual a 0,749 si queríamos mantener la bisectriz, y en la b resultaba una relación de radios de 0,507 si queríamos mantener las tangentes. Esos mismos valores son los que se obtienen ahora.

d) Manteniendo el criterio de emplear clotoides en punta para mejorar la curva circular inicial, si queremos analizar la gama de posibilidades que tenemos de radios, bisectrices y tangentes resultantes, nos ayudaremos del ábaco de la figura 15.

En el apartado c hemos deducido los valores correspondientes al mantenimiento del radio $R_i = R_i$ y hemos comprobado lo que pasaba en los casos a y b al mantener bisectrices ($B_i = B_i$) o tangentes ($T_i = T_i$).

$$\frac{A}{R} = 0,455; \frac{R_5}{R_i} = 0,78; R_5 = 195,00; A_5 = 88,725$$

Ajustando los valores de los parámetros a utilizar para tener en cuenta que han resultado radios inferiores a 250 sería:

$$R_4 = 177; \frac{A}{R} = 0,56; \frac{R_4}{R_i} = 0,700; R_4 = 175,00; A_4 = 98,000$$

$$R_5 = 195; \frac{A}{R} = 0,48; \frac{R_5}{R_i} = 0,761; R_5 = 190,25; A_5 = 91,320$$

El máximo parámetro compatible con la geometría corresponde al caso de clotoides en punta que provoca el mínimo radio. Análogamente, como vimos en el caso anterior, su valor será:

$$\frac{A}{R} = 0,84; \frac{R_6}{R_i} = 0,507; R_6 = 126,75; A_6 = 106,470$$

Dicho valor comprobamos que supera además el mínimo valor recomendado por la Instrucción que para $R = 126,75$ propone

$$\frac{A}{R} = 0,64.$$

Ahora mediante el uso del ábaco indicado disponemos a la vista de toda la gama de posibles relaciones de bisectrices y tangentes para $\omega = 45^\circ$ empleando clotoides en punta y que oscila entre:

$$B_i = 0,667 B_t$$

$$T_i = 0,987 T_t \text{ para una relación de radios } R_i = 0,5 R_t$$

y

$$B_i = 4,002 B_t$$

$$T_i = 5,922 T_t \text{ para una relación de radios } R_i = 3 R_t$$

e) Si la mejora proyectada consiste en mantener el radio inicial retranqueándolo lo suficiente y simplemente le añadimos clotoides, con los gráficos de las Figs. 17, 18 y 19 podemos determinar la bisectriz, tangente y desarrollo resultantes obtenidos para los valores mínimo, normal y máximo del parámetro los siguientes valores.

$\frac{A}{R}$	$\frac{B_i}{B_t}$	B_i	$\frac{T_i}{T_t}$	T_i	$\frac{D_i}{D_t}$	D_i	$\frac{T_i}{D_i}$
0,455	1,0288	16,94	1,282	118,24	1,293	228,49	1,246
0,55	1,0616	17,48	1,413	130,32	1,428	252,34	1,331
0,84	1,3340	21,97	1,973	181,97	2,000	353,42	1,479

El gráfico de la figura 20 nos confirma las relaciones entre bisectrices y tangentes, debiendo señalar además que en el caso límite de clotoides en punta con el mismo radio encontramos confirmada la relación entre desarrollos y radios deducida.

$$\frac{D_i}{D_t} = 2 \frac{D_t}{R_t}$$

f) Si la curva circular inicial de $R = 250$ no se encuentra aislada sino que tiene dos limitaciones, por ejemplo, que una de las tangentes no pueda pasar de 150 m. con la reforma proyectada y por otro lado que la bisectriz no pueda pasar de 20 m., estudiaremos las posibilidades de mejora existentes, incluso aumentando el radio si fuera posible con la ayuda de los ábacos preparados al efecto.

Recordemos que para $R = 250$ debemos emplear preferentemente $\frac{A}{R} \geq 0,55$

Con la composición de los ábacos 17 y 18 realizada en la figura 23, leemos:

$$\frac{A}{R} = 0,55; \frac{T_i}{T_t} = 1,413; \frac{B_i}{B_t} = 1,0616$$

que no alcanza los valores límites de clotoides en punta que

$$\text{ocurren para } \frac{A}{R} = 0,84$$

Las limitaciones *in situ* imponen:

$$\frac{T_i}{T_t} = \frac{150}{92,23} = 1,626 \text{ que representaría como tope utilizar}$$

$$\frac{A}{R} = 0,68$$

$$\frac{B_i}{B_t} = \frac{20}{16,47} = 1,214 \text{ que representaría como tope utilizar.}$$

$$\frac{A}{R} = 0,75$$

Mediante los gráficos de transformación obtenemos la relación de radios a emplear para cumplimentar la relación de tangentes y bisectrices, mejorando a un tiempo el radio mínimo.

$$n_t = \frac{1,626}{1,413} = 1,15$$

$$n_b = \frac{1,214}{1,0616} = 1,1435$$

luego la limitación de la bisectriz exige emplear un radio menor

$$R_i = 1,1435 \times 250 = 285,9$$

Para este valor la Instrucción tolera un parámetro unitario

menor $\frac{A}{R} = 0,52$ resultando en ese caso:

$$\frac{T_i}{T_t} = 1,369; \frac{B_i}{B_t} = 1,049$$

La condición más restrictiva es la bisectriz, y el nuevo valor de transformación resulta:

$$n'_b = \frac{1,0616}{1,049} = 1,012$$

resultando un radio $R = 285,9 \times 1,012 = 289,33$ y para el que la Instrucción tolera el mismo parámetro unitario, por lo que la solución final será:

$$R = 250 \times 1,1435 \times 1,012 = 289,33$$

$$A = 0,52 \times 289,33 = 150,45$$

$$T = 92,23 \times 1,1435 \times 1,012 \times 1,369 = 146,11$$

$$B = 16,47 \times 1,1435 \times 1,012 \times 1,049 = 20,00$$

que demuestra que la restricción mayor es la de la bisectriz.

Se acompaña el desarrollo gráfico elemental sobre el gráfico compuesto

*** MARCELINO CONESA LUCERGA** es Catedrático de Caminos y Aeropuertos
 E.T.S. Ingenieros de Caminos, C. y P. de Valencia

ALFREDO GARCIA GARCIA es Profesor de Caminos y Aeropuertos
 E.T.S. Ingenieros de Caminos, C. y P. de Valencia

ANEJO 1 (Tablas)

$\omega = 45^\circ$	$\frac{A}{R}$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	R_i/R_t	0,9830	0,9596	0,9197	0,8609	0,7842	—
	T_i/T_t	1,1972	1,2871	1,3730	1,4402	1,4755	—
	D_i/D_t	1,2056	1,2990	1,3882	1,4578	1,4943	—

Tabla 1. Relación entre radios, tangentes y desarrollos de una curva circular y un círculo y dos clotoides iguales, manteniendo la bisectriz.

$\omega = 45^\circ$	$\frac{A}{R}$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	R_i/R_t	0,8211	0,7456	0,6699	0,5978	0,5315	—
	B_i/B_t	0,8353	0,7770	0,7284	0,6944	0,6777	—
	D_i/D_t	1,0070	1,0093	1,0111	1,0122	1,0127	—

Tabla 2. Relación entre radios, bisectrices y desarrollos de una curva circular y un círculo y dos clotoides iguales manteniendo las tangentes.

$\omega = 45^\circ$	R_i/R_1	B_i/B_1	T_i/T_1
	0,5	0,6677	0,9874
	0,6	0,8012	1,1849
	0,7	0,9347	1,3823
	0,8	1,0683	1,5798
	0,9	1,2018	1,7773
	1,0	1,3353	1,9748
	1,1	1,4689	2,1722
	1,2	1,6024	2,3697
	1,3	1,7359	2,5672
	1,4	1,8695	2,7647
	1,5	2,0030	2,9621
	1,6	2,1365	3,1596
	1,7	2,2701	3,3571
	1,8	2,4036	3,5546
	1,9	2,5371	3,7520
	2,0	2,6707	3,9495

Tabla 3. Relación entre bisectrices y tangentes de una curva circular y dos clotoides en punta.

$\omega = 45^\circ$	A/R	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	B_i/B_1	1,0173	1,0421	1,0673	1,1615	1,2751	—
	T_i/T_1	1,2179	1,3413	1,4928	1,6728	1,8815	—
	D_i/D_1	1,2264	1,3537	1,5093	1,6932	1,9054	—

Tabla 4. Relación entre bisectrices, tangentes y desarrollos de una curva circular y el mismo círculo con dos clotoides iguales.

ANEJO 2

CARRETERAS DE DOS CARRILES

$$\frac{A}{R} \geq 1,65 \quad \sqrt{\frac{f_i}{R - J_i} \frac{127 R (p + f_i)}{R - J_i}}$$

$$\frac{A}{R} \geq \sqrt{\frac{a \cdot p}{2 R_i}}$$

$$\frac{A}{R} \geq \frac{R}{3}$$

R	p	f_i	V_{apc}	Deseable a		Mínimo a		Deseable a		Mínimo a	
				= 7 m.	A	= 7 m.	A/R	= 6 m.	A	= 6 m.	A/R
25	0,100	0,210	30	35,35	1,414	33,07	1,323	32,73	1,309	30,63	1,225
45	0,100	0,191	40	47,43	1,054	44,37	0,966	43,92	0,976	41,09	0,913
75	0,090	0,171	50	62,78	0,837	54,38	0,725	59,03	0,787	50,33	0,671
120	0,080	0,156	60	78,24	0,652	66,12	0,551	78,24	0,652	66,12	0,551
175	0,075	0,148	70	99,58	0,569	84,18	0,481	99,58	0,569	84,18	0,481
250	0,065	0,141	80	139,00	0,556	113,50	0,454	139,00	0,556	113,50	0,454
350	0,055	0,135	90	171,85	0,491	104,75	0,419	171,85	0,491	104,75	0,419
450	0,045	0,126	100	195,30	0,434	174,60	0,388	195,30	0,434	174,60	0,388
600	0,040	0,120	110	232,80	0,388	219,60	0,366	232,80	0,388	219,60	0,366
800	0,030	0,112	120	270,40	0,338	270,40	0,338	270,40	0,338	270,40	0,338

AUTOPISTAS

$$A > 180$$

$$\frac{A}{R} \geq \frac{1}{3}$$

INTERSECCIONES Y RAMALES NO DIRECCIONALES (Vesp. = 25 a 65 Km/h.)

R	=	25	35	45	60	75	90	120
A	=	22,36	28,98	35,50	43,82	51,96	60,00	73,48

RAMALES DIRECCIONALES (Vesp > 65 Km/h)

Vesp.	R	Amin
70	175-345	115
80	250-390	130
100	410-600	200

BIBLIOGRAFIA

- 1 - DIRECCION GENERAL DE CARRETERAS, M.O.P.U. «Instrucción de Carreteras. Norma 3.1-IC: Trazado», 1964.
- 2 - DIRECCION GENERAL DE CARRETERAS, M.O.P.U. «Instrucción de Carreteras. Norma Complementaria: Trazado de autopistas», 1976.
- 3 - DIRECCION GENERAL DE CARRETERAS, M.O.P.U. «Recomendaciones para el Proyecto de Intersecciones», Madrid, 1967.
- 4 - DIRECCION GENERAL DE CARRETERAS, M.O.P.U. «Recomendaciones para el Proyecto de Enlaces», Madrid, 1968.
- 5 - CONESA LUCERGA, M. «Tráfico y Trazado» Universidad Politécnica de Valencia, 1977.
- 6 - CONESA LUCERGA, M. «Trazado Geométrico en Planta

- y Perfil», Simposium sobre Trazado de Carreteras. A.E.C., Barcelona, 1983.
- 7 - CONESA LUCERGA, M., GARCIA GARCIA, A. «Diseño Geométrico de Carreteras». Servicio de Publicaciones, Universidad Politécnica de Valencia, 1987.
- 8 - BALAGUER, E., KRAEMER, C., ROCCI, S. Y SANCHEZ B., V. «Trazado de Carreteras». E.T.S. Ingenieros de Caminos, C. y P., Madrid, 1986.
- 9 - ROCCI, S. «Acondicionamiento de Trazados Antiguos». Simposium sobre Trazado de Carreteras. A.E.C., Barcelona, 1983. Carreteras n° 9, Nov.-Dic., 1983.
- 10 - CARCIENTE, J. «Carreteras». Ed. Vega. Caracas, 1980.
- 11 - VICENTE ORTIZ, A. «Trazado Geométrico de Carreteras». Madrid, 1975.