EL objeto del presente trabajo es proporcionar una curva de transición entre alineaciones rectas y circulares que, recorridas por un móvil con movimiento uniformemente variado, dé lugar a un diagrama de espacios recorridos - aceleraciones centrífugas sin graves "sorpresas" para el conductor.

Curvas de acuerdo para movimientos no uniformes

Por D. Antonio García Martínez

La clotoide como curva de transición

Tanto en carreteras como en ferrocarriles se ha impuesto la clotoide como curva de transición entre alineaciones rectas y circulares del trazado en planta, como consecuencia de la utilización generalizada del cálculo electrónico, que ha venido a aliviar al proyectista del penoso trabajo que antes suponía el manejo de tablas y sus inevitables interpolaciones. Hace poco más de treinta años los libros dedicados al tema recomendaban su sustitución por otras curvas (parábola cúbica, lemniscata, etc.) tan sólo por su mayor facilidad de cálculo.

Y no está mal escogida la clotoide, ya que debido a su ecuación intrínseca, que hace proporcionarles la curvatura y el espacio recorrido a lo largo de ella, da lugar a un diagrama de curvaturas-espacios recorridos compuesto por segmentos de líneas rectas. Estas rectas son horizontales, en el caso de los arcos de curva circular y en las alineaciones rectas, e inclinadas las que representan los arcos de clotoide que unen unas y otras.

Además, si suponemos que la vía, sea carretera o ferrocarril, es recorrida por un móvil con velocidad uniforme, este diagrama de curvaturas, con sólo un cambio de escala en el eje de ordenadas, es la representación de la variación de la aceleración centrífuga respecto al espacio recorrido. Esta aceleración experimenta una variación lineal a lo largo de las clotoides y es de valor constante, nulo o no, en alineaciones rectas y circulares.

Esta fuerza centrífuga es la que es absorbida en un cierto porcentaje por la adopción del peralte, quedando otra parte como remanente y que va en detrimento de la comodidad del usuario. Este último valor, la aceleración centrífuga no compensada por el peralte, y el de su variación con el tiempo deben ser limitados en las Normas para llevar a un mínimo sus efectos desagradables, cuando no peligrosos, sobre los usuarios.

Supongamos ahora que en el camino de un vehículo que se mueve con movimiento uniformemente decelerado se interpone una clotoide de paso entre una alineación recta y otra de tipo circular.

La fórmula que relaciona la velocidad instantánea con el espacio recorrido es:

> ***"No está mal escogida la clotoide, ya que debido a su ecuación intrínseca, que hace proporcionarles la curvatura y el espacio recorrido a lo largo de ella, da lugar a un diagrama de curvaturas-espacios recorridos compuesto por segmentos de líneas rectas."***

$$v^2 = v_1^2 - \frac{(v_1^2 - v_2^2).\,s}{L} \qquad (1)$$

donde: v_1 es la velocidad en el origen de la clotoide.
v_2 es la velocidad a una distancia L de ese origen.
s es la distancia al origen de un punto genérico.

Supongamos además que el punto a la distancia L del origen es el de tangencia entre la clotoide y un arco de curva circular de radio R_2.

La variación de la curvatura instantánea a lo largo de la clotoide viene dada por:

$$\frac{1}{R} = \frac{S}{R_2.L} \qquad (2)$$

Estudiemos ahora la variación de la aceleración centrífuga instantánea, es decir de v^2/R. Su fórmula se obtiene por simple producto de las fórmulas (1) y (2):

$$\frac{v^2}{R} = \left(v_1^2 - \frac{(v_1^2 - v_2^2).s}{L}\right)\frac{s}{R_2L}$$

si llamamos $N = v_1^2/v_2^2$, $z = s/L$ y $a = (v^2/R)/(v_2^2/R_2)$ obtenemos la siguiente fórmula en términos adimensionales:

$$a = (N - (N-1).z).z$$

que representa una parábola de segundo grado de eje vertical y concavidad hacia abajo que tiene un máximo en el punto:

$$z = \frac{N}{2(N-1)}$$

de valor:

$$a_{máx.} = \frac{N^2}{4(N-1)}$$

¿Qué quiere decir esto?

"La clotoide no es recomendable como curva de transición para movimientos uniformemente variados cuando la relación entre los cuadrados de las velocidades a la entrada y la salida de ella se prevea superior a 2."

Como para valores de N mayores que 2, z es menor que uno, aparece un máximo de la aceleración centrífuga en un punto de la clotoide, mayor que el de la aceleración centrífuga correspondiente al círculo de radio R_2, ya que $a_{máx.}$ es mayor que uno.

Ejemplos:

Pasar de 40 a 20 km/h (N= 4) produce una aceleración centrífuga relativa de 1,333. Pasar de 100 a 40 km/h (N= 6,25) la produce de 1,860, y en un caso extremo de pasar de 120 a 30 km/h ese valor se eleva (N= 16) a 4,267. En todos los casos se trata de coeficientes por los que hay que multiplicar la aceleración centrífuga a lo largo del círculo de radio R_2, en teoría la máxima.

Este valor máximo intermedio es el que, al no ser absorbido en su correspondiente parte proporcional por el peralte, produce sensaciones incómodas, e incluso a veces peligrosas, al tomar los ramales de salida de los enlaces de las autopistas.

Otro tanto sucederá sin duda en el caso del ferrocarril de alta velocidad si en los tramos previstos para disminuir la velocidad, desde los 250 km/h de crucero hasta la llegada a una estación, encuentra en su recorrido alguna clotoide.

Por esta razón, y con todos los respetos para nuestra vieja amiga, nos permitimos anunciar la siguiente:

CONCLUSION:

La clotoide **no es recomendable** como curva de transición para movimientos uniformemente variados cuando la relación entre los cuadrados de las velocidades a la entrada y a la salida de ella se prevea superior a 2.

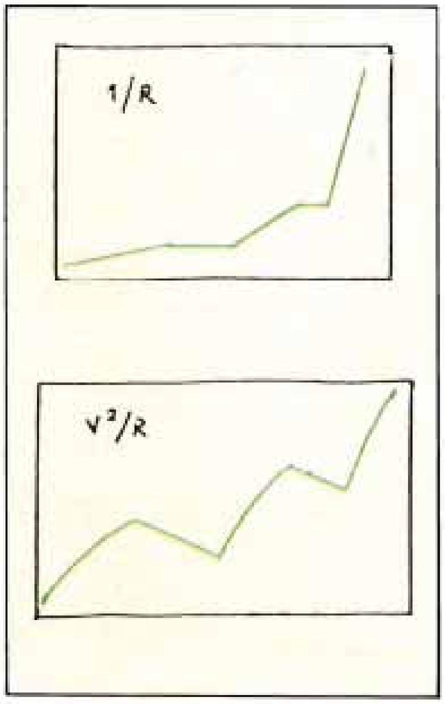
Curvas de acuerdo para velocidad variable

Comprobado el problema que, desde el punto de vista de la variación de la aceleración centrífuga, plantea la inserción de una clotoide en el recorrido de un vehículo que circula con movimiento uniformemente variado, se plantea la cuestión de encontrar otra curva que, con distinta variación de la curvatura, genere una ley de variación de las aceleraciones centrífugas sin "sobresaltos".

Desde hace bastantes años y a "salto de mata" he dedicado a este tema alguna que otra hora arrancada a otros tipos de ocio. A continuación enumero de forma somera, y sin profundizar en desarrollos matemáticos, algunas de las posibles soluciones que fui analizando y desechando, hasta llegar a la que para mí, y salvo mejor criterio de los que me lean, es la verdadera **solución.**

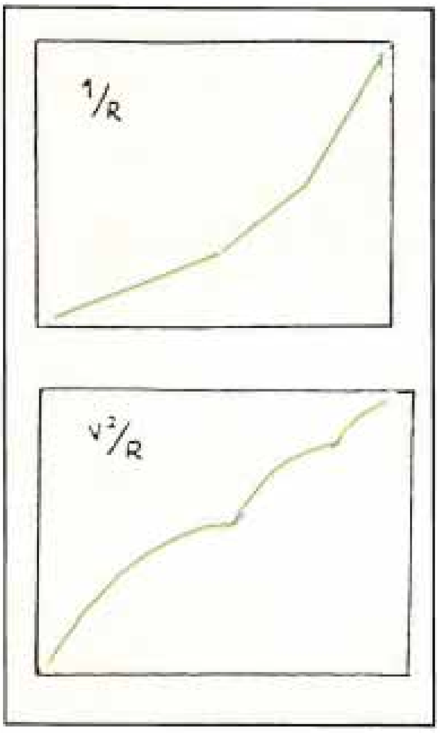
El problema quedaba planteado en los siguientes términos: encontrar una curva de variación de la curvatura que no produzca, al ser recorrida por un móvil con velocidad uniformemente decelerada, un valor máximo de la aceleración centrífuga en el interior de la curva de acuerdo.

PRIMERA APROXIMACION. Crear una curva de acuerdo a base de sucesivos arcos de círculo y de clotoide estratégicamente seleccionados. Se llegaría así a diagramas parecidos a los siguientes:



Tanto uno como otro presentan discontinuidades que "ofenden" a la vista y sobre todo el de aceleraciones, que con su aspecto de "diente de sierra", produce indeseables altibajos en su valor.

SEGUNDA APROXIMACION. Una sucesión de arcos de clotoides de diferentes parámetros con la que pueden conseguirse diagramas más agradables:



Sobre este sistema, en principio sugestivo, he escrito un buen montón de páginas que podrían dar lugar a un documento mucho más extenso que el presente.

El diagrama de curvaturas es muy aceptable y el de aceleraciones no presenta los altibajos del anterior, con tan sólo limitar las parábolas a la recta de variación lineal de la aceleración.

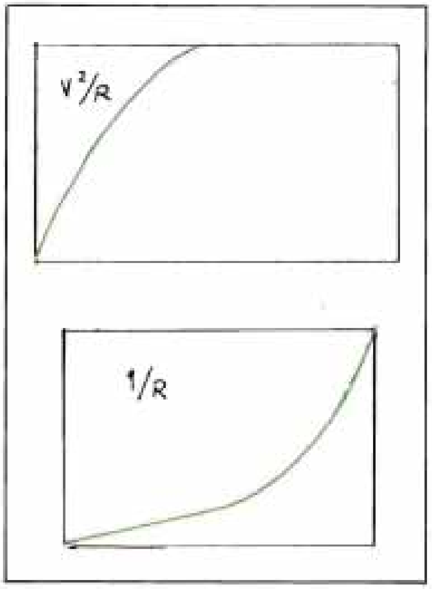
Pero presenta el inconveniente de que, para valores de N relativamente grandes, crece mucho el número de clotoides a introducir, teniendo las próximas al final de la curva longitudes mínimas.

El Dr. Ingeniero W. Blaschke propuso una solución similar a ésta con sólo dos clotoides, obtenidas por el método de los mínimos cuadrados.

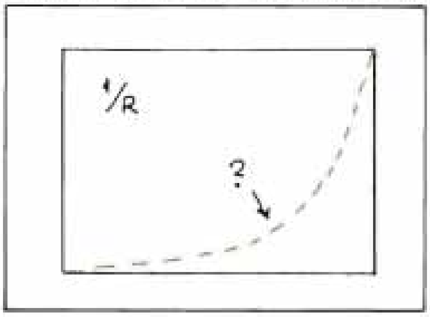
TERCERA APROXIMACION. Si se recuerda la propiedad que

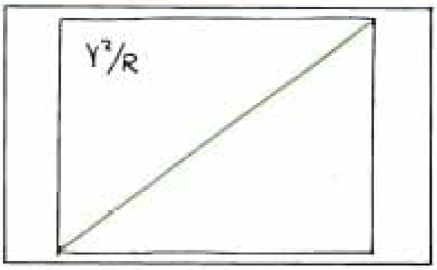
*"**Tanteos realizados con otra multitud de curvas: cicloides, epi- e hipocicloides, caracoles de Pascal y otros, Lemniscatas varias, catenarias, tractriz, curvas en estrella, etc. no llevaron a ninguna conclusión aceptable.**"*

tiene la espiral logarítmica de que, recorrida por un móvil con movimiento uniformemente variado, induce en él una aceleración centrífuga de valor constante, podría constituirse la curva de acuerdo mediante dos arcos debidamente escogidos uno de clotoide y otro de espiral logarítmica. Los diagramas presentarían aspectos como:



Ambos diagramas presentan aspectos muy aceptables y sólo puede achacárseles el que "anticipan" en exceso la aparición del valor





máximo de la aceleración centrífuga.

CUARTA APROXIMACION. Fijar a priori un diagrama de aceleraciones centrífugas con variación lineal y de él deducir el correspondiente de curvaturas.

El problema es inabordable por fórmulas o por desarrollos en serie y, aunque probablemente admita una solución por el método de los incrementos finitos, mi desconocimiento de esta técnica me obligó a abandonar este camino, que quizá otros puedan desbrozar.

OTRAS POSIBLES APROXIMACIONES. Tanteos realizados con otra multitud de curvas: cicloides, epi- e hipocicloides, caracoles de Pascal y otros, Lemniscatas varias, catenarias, tractriz, curvas en estrella, etc. no llevaron a ninguna conclusión aceptable.

Las clotoides parabólicas

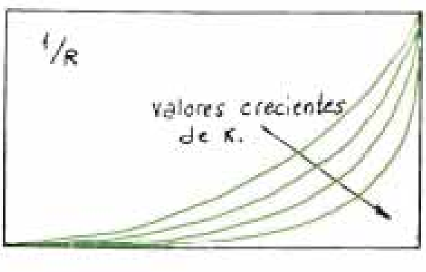
El Dr. Lorenz llamó clotoides de dos parámetros a un tipo de curvas a las que yo he dado en llamar, por lo que a continuación veremos, CLOTOIDES PARABOLICAS.

Su ecuación intrínseca es de la forma:

$$R.s^k = A^{k+1}$$

que, en el caso de k = 1, coincide con la de la clotoide convencional. Y, curiosamente, la circunferencia es una clotoide de grado 0, ya que la ecuación se reduce a R = A.

Estas curvas así definidas presentan diagramas de curvatura en forma de parábolas (de ahí el nombre propuesto) tangentes en el origen al eje de abscisas, si k es mayor que la unidad, o tangentes al eje de ordenadas, si es menor que la unidad.



Para el fin que perseguimos adoptaremos las primeras que presentan una concavidad acorde con la que necesitamos para evitar el máximo de la fuerza centrífuga.

De forma similar al proceso de cálculo seguido para obtener los desarrollos en serie de las x e y de los diferentes puntos de una clotoide normal, se pueden obtener también en éstas dichos desarrollos para su aplicación en programas de cálculo por ordenador. Para no hacer más farragoso el contenido de este artículo incluyo su cálculo en anejo independiente.

De la ecuación intrínseca antes escrita deducimos la fórmula de la curvatura para la obtención posterior de la correpondiente a la fuerza centrífuga:

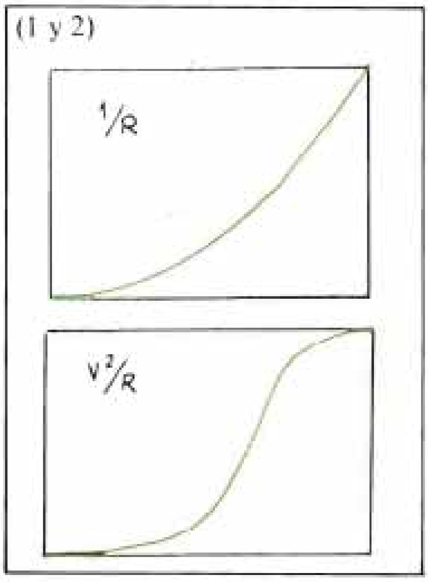
$$\frac{1}{R} = \frac{S^k}{A^{k+1}} = \frac{S^k}{L^k.R_2} = \frac{z^k}{R_2}$$

que multiplicada por la de la velocidad y aplicando las mismas sustituciones que en el caso de la clotoide normal nos lleva a una expresión para la aceleración centrífuga relativa:

$$a = (N - (N-1).z).z^k$$

Esta es una curva que tiene en el origen un punto mínimo de orden superior y un máximo para:

$$z = \frac{K.N}{(k+1).(N-1)}$$



lo que nos permite conseguir, haciendo $k = N-1$, que z valga la unidad y que, por lo tanto, el máximo de aceleración centrífuga se sitúe en el punto de tangencia de la curva de acuerdo con el círculo de radio R_2.

Se obtiene así diagramas de la forma (1 y 2) que, salvo la presencia de un punto anguloso en el final del de curvaturas, presentan un aspecto adecuado.

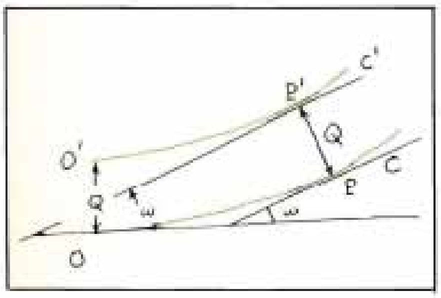
Pero ni aún así es posible resolver satisfactoriamente el enlace deseado a poco que crezca N. En efecto, para valores relativamente grandes de N, el ángulo total girado ($L/N.R_2$) disminuye rápidamente, lo que impide separarse lo suficiente de la recta inicial y, por otra parte, la pendiente del diagrama de aceleraciones en su punto de inflexión (valor máximo de la sobreaceleración centrífuga) toma valores muy fuertes y que llegan a sobrepasar los admitidos en las Normas.

Por ello estudié a continuación:

Las curvas paralelas a las clotoides parabólicas

Sea C una clotoide parabólica de ecuación intrínseca:

$$R.s^k = A^{k+1}$$



Llevemos sobre cada una de sus normales y en el mismo sentido un segmento de lontigud Q, a partir de cada punto de la curva. El lugar geométrico de todos estos puntos será otra curva C' a la que denominamos paralela.

Obsérvese que los centros de curvatura son coincidentes y que los radios están en la relación

$$R = R' + Q$$

No es difícil demostrar que la longitud s desde el punto de inflexión O de la curva C hasta un punto genérico P y la longitud s'

"Para valores relativamente grandes de N, el ángulo total girado (L/N.R) disminuye rápidamente, lo que impide separarse lo suficiente de la recta inicial."

desde el punto de inflexión O' de la curva C' hasta el punto genérico P', homólogo del P, están en la relación:

$$S = S' + Q.\omega$$

siendo ω el ángulo que con el eje de abscisas forman las tangentes en P y P', paralelas entre sí.

Así pues la ecuación intrínseca de la curva C' se puede obtener de:

$$(R'+Q).(S'+Q-\omega)^k = A^{k+1}$$

de la que habrá que eliminar el ángulo ω.

Después de diversas transformaciones, que se recogen en el Anejo de cálculo, y adoptando además lo siguientes valores relativos:

$$q = \frac{Q}{R_2} \qquad r = \frac{R'}{R_2}$$

para la distancia entre ambas curvas paralelas y para el radio de curvatura de la curva paralela, se llega a la siguiente ecuación intrínseca:

$$z = \frac{(k+1).r + k.q}{k.q + k+1} \cdot \left(\frac{1+q}{r+q} \right)^{\frac{k+1}{k}}$$

que presenta la dificultad de no permitir expresar de forma explícita el valor del radio de curvatura relativo, r, en función de la abscisa curvilínea relativa, z, lo que dificulta los subsiguientes cálculos.

La expresión de la aceleración centrífuga relativa adopta en este caso la forma:

$$a = \frac{N-(N-1)z}{T}$$

Haciendo variar los valores de k y q y mediante programas adecuados de ordenador pude sacar conclusiones preliminares que después confirmé por el cálculo.

Todas estas curvas tienen un mínimo de orden superior con tangente horizontal en el origen.

Si adoptamos para q un valor:

$$q = \frac{\sqrt{4.(k+1).(N-1)+1} - (2k+1)}{2k}$$

las curvas correspondientes tienen un punto con tangente horizontal en el punto $z = 1$. El proceso de cálculo queda recogido en el Anejo de cálculo.

Pero estas curvas, para determinados valores de k, dan a ese punto el carácter de mínimo, con lo que, al ser el origen también un mínimo, tendrán un máximo intermedio (de muy difícil obtención mediante el cálculo) que, si bien no suele ser demasiado exagerado, como lo demuestran las curvas dibujadas, desvirtúa el objetivo inicial de lograr una curva de aceleraciones sin máximos intermedios.

Para evitarlo se procede a obligar que el punto de inflexión coincida también con la abscisa curvilínea $z = 1$ con lo que se obtiene la condición:

$$k = \frac{N-3}{4}$$

que sustituida en la anterior nos da para q el valor:

$$q = \frac{N+1}{N-3}$$

con los que existe la garantía de que el punto $z = 1$ tiene tangente horizontal y de que no existe ningún máximo "fantasma" intermedio.

Este procedimiento es válido para valores de N mayores de 7, ya que, según indiqué al principio, k debe ser igual o mayor que la unidad. Para valores de N comprendidos entre 2 (límite de validez de la clotoide convencional) y 7 habrá que tomar $k = 1$ y

$$q = \frac{\sqrt{8.N-7} - 3}{2}$$

deducido de la fórmula anterior, para garantizar un máximo en el punto final. Estaremos por lo tanto utilizando una paralela a una clotoide convencional.

RESUMEN.

De todo lo expuesto se deduce que:

Si N tiene un valor de como máximo 2:

- puede utilizarse como curva de acuerdo la **clotoide** convencional.

Si N es mayor que 2, e inferior a 7:
– debe utilizarse como curva de acuerdo una **paralela a la clotoide** convencional a la distancia q.R donde q vale:

$$q = \frac{\sqrt{8.N-7-3}}{2}$$

Si N es mayor que 7:
– debe utilizarse como curva de acuerdo una **paralela a una clotoide parabólica de grado k** a la distancia q.R siendo los valores de k y q:

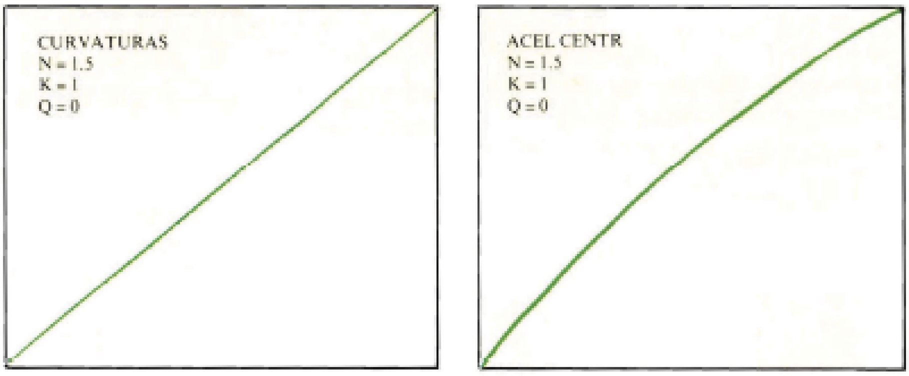
$$k = \frac{N-3}{4} \qquad q = \frac{N+1}{N-3}$$

Comentarios finales

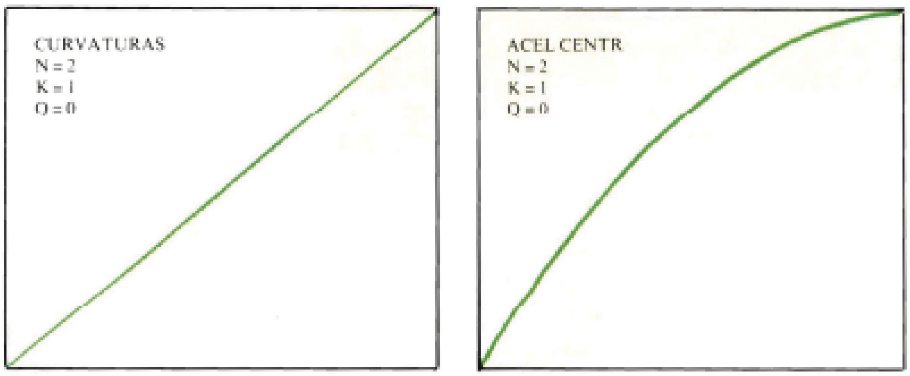
Puede observarse que en el presente trabajo tanto los diagramas de curvaturas como los de aceleraciones centrífugas se estudian siempre tomando valores relativos de las variables que en ellos intervienen, por lo que su morfología, que depende tan sólo del valor N, es completamente válida sea cual fuere el valor absoluto de las otras variables que intervienen en el problema.

Asimismo y también como consecuencia de trabajar en valores relativos no se ha necesitado prejuzgar cuál ha de ser el valor del radio del círculo final, R_2, que según las Normas, será función de la velocidad final, v_2; ni tampoco prejuzgar la longitud L de la curva de acuerdo que será función de las velocidades inicial y final, v_1 y v_2, y de la deceleración que se adopte (o de la aceleración, ya que el método también es válido en este caso, aunque el desarrollo se haya realizado en el supuesto de disminución de velocidad).

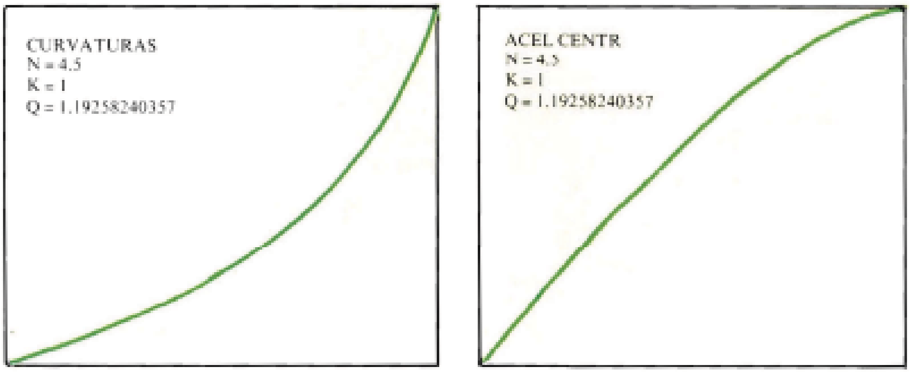
Lo que se garantiza con las recomendaciones recogidas en el apartado RESUMEN es que tanto el diagrama de curvaturas como el de aceleraciones centrífugas tienen un "aire" adecuado, según puede comprobarse en las figuras que cierran este trabajo. Puede ponerse la objeción de que para todo este proceso ha habido que fijar las velocidades inicial y final y que en la realidad las cosas pueden suceder de formas muy distintas a la previsión. Pues bien, invito al que tal cosa piensa que, como yo, trate de comprobar cómo una curva de acuerdo de estas características se comporta ante vehículos que circulen en condiciones muy distintas de las previstas y verá que, si bien es cierto que en algunos casos extremos pueden aparecer puntos intermedios con valores de la aceleración centrífuga mayores que el final, carecen de relevancia, y de todas formas son infinitamente menores que los que se provocarían si el estudio se hiciese sobre una clotoide normal.



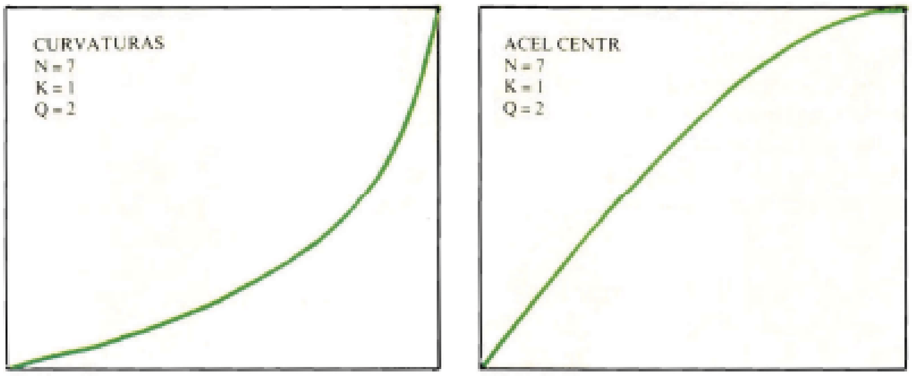
Un caso típico de aplicación de la clotoide convencional.



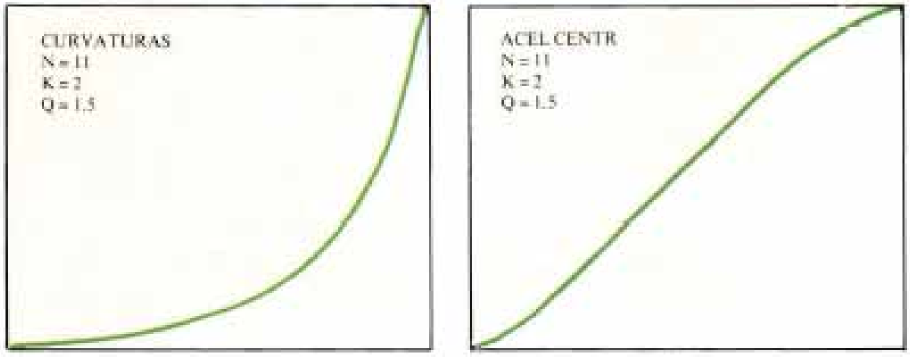
Valor límite de N que permite aplicar la clotoide convencional.



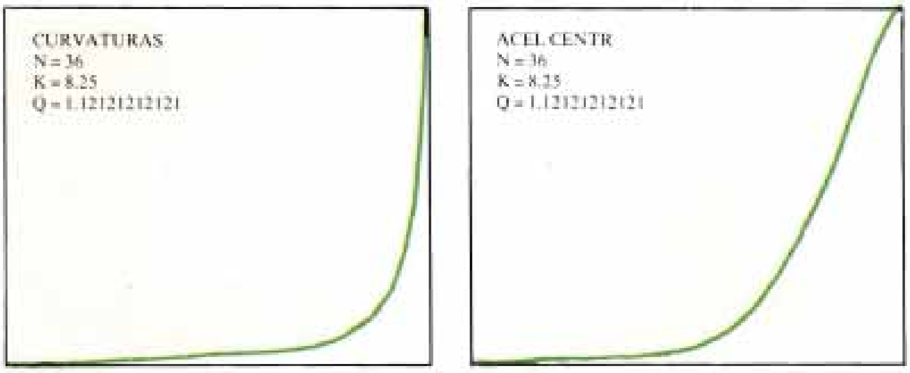
Un caso de solución a base de una paralela a la clotoide.



Valor límite de N que permite la aplicación de la paralela a la clotoide.



Un caso cualquiera de paralela a una clotoide parabólica.



Un caso extremo de aplicación del sistema ($v_1 = 120$, $v_2 = 20$ km/h).

Anejo de cálculo

Las clotoides parabólicas

Su ecuación intrínseca es: $R.s^k = A^{k+1}$ y como $ds = R.d\omega$ se obtiene por sustitución: $s^k.\ ds = A^{k+1}.d\omega$

Integrando obtenemos: $s^{k+1} = (k+1).\ A^{k+1}.\omega$ de donde:

$$\omega = \frac{S^{k+1}}{(k+1).A^{k+1}} = \frac{S}{(k+1).R}$$

Si sustituimos este valor de ω en:

$dx = ds.\cos\omega \qquad dy = ds.\mathrm{sen}.\omega$

obtenemos:

$$dx = ds.\cos\left(\frac{S^{k+1}}{(k+1)A^{k+1}}\right)$$

y desarrollando en serie el coseno:

$$dx = ds.\left[1 - \frac{S^{2k+2}}{(k+1)^2.2!.A^{2k+2}} + \frac{S^{Ak+4}}{(k+1)^4.4!A^{4k+4}} - \dots\right]$$

e integrando:

$$x = S - \left[\frac{S^{2k+3}}{(2k+3).(k+1)^2.2!A^{2k+2}} + \frac{S^{4k+5}}{(4k+5).(k+1)^4.4!A^{4k+4}} - \dots\right]$$

o bien, teniendo en cuenta el valor de ω:

$$x = S\left[1 - \frac{\omega^2}{(2k+3).2!} + \frac{\omega^4}{(4k+5).4!} - \dots\right]$$

y análogamente:

$$y = S\left[\frac{\omega}{k+2} - \frac{\omega^3}{(3k+4).3!} - \frac{\omega^5}{(5k+6).5!} - \dots\right]$$

que permiten el cálculo de las coordenadas de un punto, conocido el valor de la abscisa curvilínea, s.

Las paralelas a las clotoides parabólicas

A partir de la relación:

$$(R'+Q).(S'+Q.\omega)^k = A^{k+1} \qquad (1)$$

y si tenemos en cuenta que: $d(S'+Q.\omega) = (R'+Q).d\omega$ se obtiene por sustitución e integración:

$$(S'+Q\omega)^{k+1} = (k+1).A^{k+1}.\omega \qquad (2)$$

que, dividida por la (1) nos lleva a:

$$(S'+Q.\omega) = (k+1).(R'+Q).\omega$$

de donde:

$$S' = [(k+1).R' + k.Q].\omega$$

y

"Tanto el diagrama de curvaturas como el de aceleraciones centrífugas tienen un "aire" adecuado, según puede comprobarse en las figuras que cierran este trabajo."

$$S+Q\omega = \frac{(k+1)(R'+Q).S'}{(k+1)R' + k.Q}$$

y sustituyendo en (1):

$$S'^k(R'+Q)^{k+1}(k+1) = A^{k+1}[(K+1)R' + kQ]^k$$

y expresando que ha de verificarse para $S' = L$ y $R' = R_2$

$$L^k(R_2+Q)^{k+1}(k+1)^k = A^{k+1}[(k+1)R_2 + kQ]^k$$

y dividiendo una por otra y teniendo en cuenta los valores relativos establecidos en el texto:

$$z^k(r+q)^{k+1}(k+1+kq)^k = (1+q)^{k+1}.[(k+1)r + kq]^k$$

o bien despejando z:

$$z = \frac{(k+1).r + kq}{k+1+kq}\left(\frac{1+q}{r+q}\right)^{\frac{k+1}{k}}$$

derivando dos veces sucesivas respecto de z y llamando $r' = dr/dz$ y $r'' = d^2r/dz^2$ obtenemos:

$$r' = \frac{-k(1+k+kq)(r+q)^{\frac{2k+1}{k}}}{(k+1)(1+q)^{\frac{k+1}{k}}.r}$$

$$r'' = \frac{(r+q)^{\frac{k+1}{k}}[(k+1)r - kq].r'}{k.r^2}$$

Los puntos de la curva se obtienen del siguiente modo: de la relación (2) y por aproximaciones sucesivas deducimos el valor de ω. Con este valor y con el de $s = s' + Q.\omega$ entramos en los desarrollos en serie de x e y; por último los valores de x' e y' del punto de la paralela, referidos a su punto de inflexión como origen, valen:

$x' = x - Q.\mathrm{sen}\omega$
$y' = y + Q.\cos\omega - Q$

Análisis del diagrama de aceleraciones

Como se ha visto en el texto el valor de la aceleración relativa es:

$$a = [N - (N-1).z]/r$$

Su derivada respecto de z es:

$a' = da/dz = - [(N-1).r + (N - (N-1).z).r']/r$

que en el origen con $z = 0$ es nula. Luego la curva tiene en él tangente horizontal.

Obliguemos también a que para $z = 1$ sea nula a':

obtenemos: $r'_1 = -N + 1$ siendo r'_1 el valor de r' para $z = 1$ que es $r'_1 = -k.(1+k+k.q).(1+q)/(1+k)$.

De una y otra se deduce una ecuación de segundo grado en q cuya solución es:

$$q = \frac{\sqrt{4(k+1).(N-1)+1} - (2k+1)}{2k} \quad (3)$$

El valor de la derivada segunda de a con respecto a z: $a'' = d^2 a/dz^2 = [(N - (N-1).z).(2.r'^2 - r.r'')+2.(N-1).r.r']/r$ en el punto $z = 1$ vale $a'' = -r''$, (valor de r'' para $z = 1$).

Pero el signo de r'' viene dado por el del paréntesis $(k+1).r - k.q$ y si en éste sustituimos el valor de q antes hallado, se llega a que el signo de a'' es el contrario del de $k - (N-3)/4$.

Por lo tanto y en resumen:

Si $k < (N-3)/4$, el punto $z = 1$ será un mínimo y como el origen también lo es, habrá necesariamente un máximo intermedio no deseable. La posición y valor de este máximo no son fácilmente deducibles.

Si $k = (N-3)/4$ el punto $z = 1$ será el punto de inflexión con tangente horizontal.

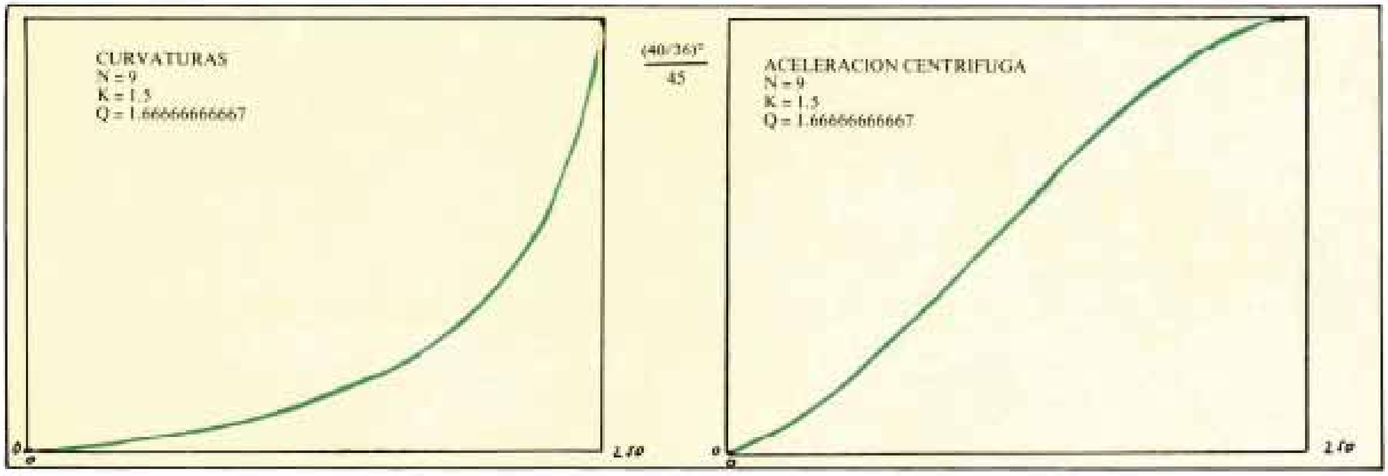
Si $k > (N-3)/4$ el punto $z = 1$ será un máximo.

Como ya se dice en el texto a mayores valores de k corresponden menores valores del ángulo total de giro lo que tiende a dificultar el enlace. Por ello nos quedaremos con el valor $k = (N-3)/4$ excepto en los casos en que N sea menor que 7 en los que habremos de tomar necesariamente $k = 1$ (clotoide convencional) y el valor de q deducido de (3) que en este caso es:

$$q = \frac{\sqrt{8N-7} - 3}{2}$$

Glosario de variables utilizadas en el texto

A = Parámetro de las clotoides.
a = Aceleración centrífuga relativa = $(v^2/R)/(v_2^2/R_2)$ en un punto genérico de la curva.
$a_{máx}$ = Valor máximo de a.
a' = Derivada primera de a con respecto a z.
a'' = Derivada segunda de a con respecto a z.
d = Indicativo de diferencial de una variable.
k = Grado de las clotoides parabólicas. Exponente de S en la ecuación intrínseca.
L = Longitud de la curva de transición.
N = Relación entre los cuadrados de las velocidades a la entrada y a la salida de la curva de transición = (v_1^2/v_2^2).
Q = Equidistancia entre dos curvas paralelas.
q = Valor relativo de $Q = Q/R_2$.
R = Radio de curvatura de un punto genérico de la curva.
R' = Radio de curvatura de un punto genérico de la paralela a una clotoide.
R_2 = Radio de curvatura al final de la curva de transición.
r = Radio de curvatura relativo en un punto genérico de la paralela a una clotoide = R'/R_2.
r' = Derivada primera de r respecto a z.
r'_1 = Valor de r' para $z = 1$.
r'' = Derivada segunda de r respecto de z.
r''_1 = Valor de r'' para $z = 1$.
S = Abscisa curvilínea de un punto genérico de la curva.
S' = Abscisa curvilínea de un punto genérico de la paralela a una clotoide.
v = Velocidad en un punto genérico de la curva.
v_1 = Velocidad en el origen de la curva de transición.
v_2 = Velocidad en el final de la curva de transición.
x = Abscisa de un punto genérico de la curva.
x' = Abscisa de un punto genérico de la paralela a una clotoide.
y = Ordenada de un punto genérico de la curva.
y' = Ordenada de un punto genérico de la paralela a una clotoide.
z = Abscisa curvilínea relativa = S/L.
ω = Angulo que la tangente en un punto genérico de la curva forma con la tangente en el punto de inflexión de la clotoide.



Curva de acuerdo para:

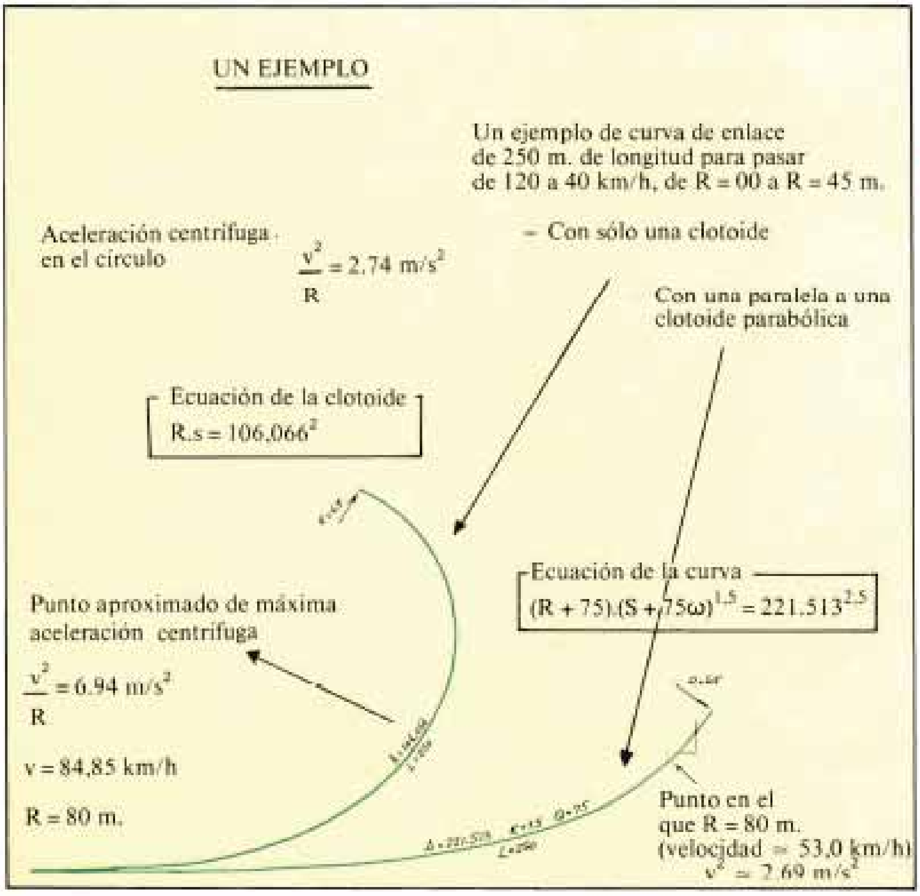
$v_1 = 120$ km/h.
$v_2 = 40$ km/h.
$R_2 = 45$ m.
L = 250 m.
Jo = 2 m/s^2 (deceleración máxima admitida).
J = 1.97530864198 m/s^2 = $(v_1^2 - v_2^2)/2L$.

Solución:

PARALELA A LA CLOTOIDE DE GRADO = 1.5 Y PARAMETRO = 221.51326865 m. A LA DISTANCIA = 75.0000000002 m.

LISTADO DE PUNTOS CADA 25 m.

S	X	Y	Az	R
25.000	0.012	25.000	0.1104	5722.081
50.000	0.142	50.000	0.6399	1944.741
75.000	0.600	74.995	1.8228	1002.747
100.000	1.690	99.970	3.9015	607.692
125.000	3.817	124.877	7.1738	398.712
150.000	7.516	149.596	12.0451	272.119
175.000	13.488	173.858	19.1206	188.065
200.000	22.658	197.087	29.4086	128.179
225.000	36.213	218.021	44.8807	82.662
250.000	55.471	233.696	70.7355	45.000



ANTONIO GARCIA MARTINEZ, Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos de la promoción de 1955. Ha desarrollado su actividad profesional en el campo del proyecto de infraestructuras en la Administración (Oficina Regional de Proyectos de Carreteras de Barcelona), en la iniciativa privada (Autopistas, Concesionaria Española S.A., Altos Hornos del Mediterráneo S.A. y Autopista Vasco-Aragonesa S.A.) y en empresas estatales (Ferrocarriles de Vía Estrecha, FEVE), habiendo colaborado con la Dirección General de Infraestructura de Transportes del Ministerio de Transportes, Turismo y Comunicaciones y con RENFE en la dirección del proyecto del TAV entre Madrid y Brazatortas. En la actualidad es Jefe de la Inspección Central de FEVE.